UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DELLA BASILICATA

Inaugurazione
trentaseiesimo Anno Accademico
2018-2019

Prolusione

Prof. Alberto Cialdea

L'Analisi matematica italiana del novecento
attraverso l'opera di alcuni dei suoi protagonisti

Potenza, 26 novembre 2018

L'Analisi Matematica italiana del novecento attraverso l'opera di alcuni dei suoi protagonisti.

Una premessa è d'obbligo. Non essendo uno storico della matematica, la mia non sarà una prolusione di storia della matematica in senso stretto. Piuttosto, attraverso il ricordo di alcuni degli analisti del novecento italiano, che hanno dato alla matematica italiana contributi fondamentali per il progresso di questa, intendo rendere omaggio a quelle che sono le mie radici scientifiche. Di ciascuno di loro non descriverò l'opera completa - non basterebbe un'ora per ciascuno - ma descriverò molto brevemente un risultato, a mio modo di vedere significativo.

Anche se non ho intenzione di fare una prolusione di tipo storico, non posso non ricordare che all'inizio del novecento l'Analisi Matematica italiana godeva di ottima salute. I nomi di Ulisse Dini (Pisa, 14.11.1845 – Pisa, 28.10.1918), Vito Volterra (Ancona, 03.05.1860 – Roma, 11.10.1940), Carlo Severini (10.03.1872 – 11.05.1951), Giuseppe Vitali (Ravenna, 26.08.1875 – Bologna, 29.02.1932), Guido Fubini (Venezia, 19.01.1879 – New York, 06.06.1943), Eugenio Elia Levi (Torino, 18.10.1883 – Cormons, 28.10.1917), Leonida Tonelli (Gallipoli, 19.04.1885 – Pisa, 12.03.1946) sono tutti legati a risultati ormai classici.

Gli studenti dei corsi di Analisi imparano a conoscere al primo anno di studi, ad esempio, il nome di Ulisse Dini, studiando il cosiddetto teorema sulle funzioni implicite, che costituisce un risultato fondamentale per l'analisi matematica e non solo. Più avanti, in corsi più avanzati, ma sempre istituzionali, studiano i teoremi di Severini–Egoroff, di Vitali, di Tonelli e di Fubini, tutti risultati che universalmente vengono attribuiti a questi matematici italiani e che ben dimostrano come - all'epoca - l'analisi matematica fosse all'avanguardia.

Un discorso particolare merita Eugenio Elia Levi, mente geniale, che morì a 34 anni durante la prima guerra mondiale e che lega il suo nome a concetti ancora oggi fondamentali nella teoria delle equazioni alle derivate parziali (parametrix, pseudoconvessità).

Il primo matematico di cui parlerò è Francesco Giacomo Tricomi (Napoli, 5 maggio 1897 - Torino, 21 novembre 1978). Fu assistente di Francesco Severi prima a Padova e poi a Roma, dove Severi si era trasferito. Nel 1925 - a soli 27 anni - vinse il concorso a cattedra di Analisi algebrica ed infinitesimale a Firenze. Dopo un anno si trasferì a Torino, dove rimase fino alla fine della sua vita, tranne una breve parentesi nella quale - costretto dal suo antifascismo - dovette allontanarsi da Torino e vivere clandestinamente.

Aveva un carattere forte ed estremamente indipendente e questa sua caratteristica si riflette nella sua ricerca.

Tricomi ha pubblicato 346 lavori, inclusi libri e monografie. Alcuni dei suoi libri, come quelli sulle serie ortogonali, sulle equazioni differenziali e sulle equazioni integrali, sono stati tradotti in inglese, tedesco e russo e continuano ad essere ristampati. I cinque volumi del cosiddetto Bateman Project - tre dal titolo "Higher trascendentali functions" e due "Tables of Integral Transforms" - scritti in collaborazione con Arthur Erdélyi, Wilhelm Magnus e Fritz Oberhettinger, sono stati per anni il testo di riferimento assoluto sulle funzioni speciali. "The Bateman Project was a tremendous success. It trained a generation of mathematicians who did research in special functions. The absolute top people in the field were involved, and they made some very good choices about what material to include. " (WILLARD MILLER, JR. (University of Minnesota)).

Il risultato di Tricomi del quale vorrei parlare è relativo all'equazione

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{1}$$

un'equazione che Tricomi cominciò a studiare sistematicamente già dall'estate del 1920, quando aveva solo 23 anni. Fino ad allora le equazioni differenziali del secondo ordine che venivano più studiate - in quanto suggerite da problemi fisici - erano equazioni che risultano essere ellittiche o paraboliche o iperboliche. Tricomi - in questo spinto esclusivamente dalla sua curiosità scientifica - si pose il problema di studiare un'equazione che non fosse di un tipo ben determinato in tutto il suo dominio, ma che potesse essere ellittica in un sottoinsieme, parabolica in un altro e iperbolica in un terzo. L'equazione (1) rappresenta il prototipo di questo tipo di equazioni, dette equazioni di tipo misto; essa risulta ellittica nel semipiano $y > 0$, iperbolica nel semipiano $y < 0$ e parabolica sulla retta $y = 0$.

Tricomi cominciò a studiare sistematicamente questa equazione, che è di tipo completamente nuovo rispetto a quelle studiate fino ad allora e per la quale - all'epoca - non si sapeva nemmeno quali fossero i problemi "ben posti". La trattazione richiedeva il superamento di enormi difficoltà e l'utilizzo di metodi nuovi.

Dopo qualche anno, precisamente nel 1923, un giovanissimo Tricomi presentò all'Accademia Nazionale dei Lincei una memoria dal titolo "Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto" che fu pubblicata nello stesso anno negli Atti dell'Accademia. Si tratta di un lavoro imponente, di più di cento pagine, nel quale Tricomi getta le fondamenta teoriche di questo tipo di equazioni.

Come Tricomi amava dire, questa Memoria dormiva sonni tranquilli negli scaffali dell'Accademia dei Lincei fino a quando, intorno al 1945, non successe qualcosa di particolare. Le grandi velocità raggiunte dagli aerei a reazione in quegli anni suggerivano che doveva essere possibile superare la barriera del suono. D'altra parte, lo studio teorico si imbatteva nella difficilissima equazione alle derivate parziali non lineare del potenziale cinetico, della quale si sapeva ben poco. Si tratta di un'equazione di tipo misto, che risulta essere di tipo ellittico in regime subsonico (cioè se la velocità è inferiore a quella del suono), di tipo iperbolico se è supersonico, e di tipo parabolico nella fase transonica.

In quegli anni, indipendentemente l'uno dall'altro, von Karman negli Stati Uniti e Frankl nell'Unione Sovietica, si accorsero che l'equazione che forniva un'approssimazione del primo ordine dell'equazione del potenziale cinetico era proprio l'equazione (1). Entrambi, quindi, giunsero alla conclusione che per capire bene i fenomeni che accompagnavano il superamento della barriera del suono, occorreva studiare l'equazione (1).

Fu con grande stupore che ci si accorse che più di vent'anni prima un matematico italiano, nella memoria lincea di più di cento pagine che ho prima citato, aveva già posto le fondamenta di questa teoria, risolvendo uno dei relativi problemi al contorno fondamentali, e fornendo inoltre un armamentario analitico che poteva essere usato in altri problemi relativi alla stessa equazione. Il nome di Tricomi - che era all'epoca già noto in ambito internazionale per altri suoi contributi - divenne ancora più famoso e da allora l'equazione (1) è nota universalmente come "equazione di Tricomi".

Senza il lavoro di Tricomi, forse gli aerei che superano la barriera del suono sarebbero stati realizzati molto più tardi. E mi piace sottolineare come Tricomi sia stato portato a studiare queste equazioni spinto esclusivamente dalla sua curiosità scientifica, e non certo dalle "mode" che pure sono sempre esistite nella ricerca. E permettemi anche di osservare che se avessimo dovuto giudicare all'epoca questa Memoria utilizzando i cosiddetti metodi bibliometrici, così di moda oggigiorno per valutare in modo "obiettivo" il nostro lavoro scientifico, avremmo considerato per più di vent'anni questa memoria come qualcosa di insignificante ....

Il secondo matematico di cui parlerò è Mauro Picone (Palermo, 02.05.1885 – Roma, 11.04.1977). Laureatosi alla Normale di Pisa, vi rimase come assistente di Ulisse Dini fino allo scoppio della prima guerra mondiale. Dopo la fine di questa insegnò in diverse università: Catania, Cagliari, Pisa, Napoli e Roma, dove operò dal 1932 fino al suo collocamento a riposo, avvenuto nel 1960.

Mauro Picone scrisse più di 300 lavori e diverse monografie. Ben nota è la cosiddetta *identità di Picone* che ha conseguenze notevolissime nello studio delle equazioni differenziali sia ordinarie che alle derivate parziali. Si occupò di diverse questioni relative alle equazioni differenziali, comprese questioni di Analisi Numerica, finalizzate in particolare alla soluzione numerica di problemi al contorno. Si occupò anche di Geometria Differenziale.

Il suo testo Appunti di Analisi Superiore, un tomo di più di 850 pagine e che ho la fortuna di possedere in quanto lasciatomi da mio padre, fu un testo veramente all'avanguardia quando fu scritto (cioé nel 1940) e continua ad essere un validissimo testo di riferimento per alcuni argomenti classici.

Oggi vorrei ricordare Picone in particolare per due motivi. Il primo è che fu un Maestro fuori dal comune. In uno dei suoi scritti (La mia vita, 1972) Picone elenca (in ordine temporale) i suoi allievi:
1) Gabriele Mammana (Università di Napoli)
2) Renato Caccioppoli (Università di Napoli)
3) Antonio Colucci (Accademia Aeronautica di Caserta)
4) Fabio Conforto (Università di Roma)
5) Giuseppe Scorza Dragoni (Università di Bologna)
6) Gianfranco Cimmino (Università di Bologna)
7) Carlo Miranda (Università di Napoli)
8) Demetrio Mangeron (Università di Iasi)
9) Carlo Tolotti (Universit di Napoli)
10) Wolfango Grbner (Università di Innsbruck)
11) Lamberto Cesari (Università di Michigan)
12) Tullio Viola (Università di Torino)
13) Mario Salvadori (Columbia University)
14) Luigi Amerio (Politecnico di Milano)
15) Gaetano Fichera (Università di Roma)
16) Wolf Gross (Università di Roma)
17) Giuseppe Grioli (Università di Padova)
18) Sandro Faedo (Università di Pisa)
19) Domenico Caligo (Università di Pisa)
20) Giovanni Aquaro (Università di Bari)
21) Aldo Ghizzetti (Università di Roma)

22) Walter Gautschi (Università di Lafayette)
23) Benedetto Pettineo (Università di Palermo)
24) Ferdinando Bertolini (Università di Pittsburgh)
25) Carlo Pucci (Università di Firenze)
26) Ennio De Giorgi (Università di Pisa)
27) Paolo Tortorici (Università dell'Aquila).

E' un elenco impressionante, se si considera il valore raggiunto da molti dei suoi allievi. Vi compaiono tutti i migliori analisti dell'epoca e il fatto che essi siano sparsi in diverse università italiane spiega come mai intorno agli anni sessanta tre quarti dei docenti di analisi italiani si potessero considerare allievi diretti o indiretti di Mauro Picone.

L'altro motivo per il quale vorrei ricordare Picone è in qualche modo legato alla sua esperienza bellica. Racconta Picone stesso, che quando nel 1916 si presentò al Comando d'Artiglieria della I^a Armata in Trentino, il colonnello suo superiore - venuto a conoscenza che Picone era un matematico - gli ordinò di correggere le tavole di tiro dell'artiglieria che si stavano rivelando non corrette. Nonostante Picone non avesse all'epoca alcuna nozione di Balistica, si mise all'opera, capendo immediatamente che il motivo per il quale le tavole non funzionavano era che queste presupponevano che i bersagli fossero più o meno sullo stesso piano dei cannoni. Fra le gole del Trentino, invece, il dislivello tra questi era tutt'altro che trascurabile e questo rendeva fallaci le tavole allora in uso. Si mise quindi all'opera e nel giro di un mese fu in grado di fornire le nuove tavole di tiro che si rivelarono efficaci e che contribuirono non poco alle vittorie italiane.

Questo risultato, sebbene non particolarmente difficile, soprattutto per un matematico di quel livello, fece si che Picone cominciasse a pensare alla creazione di un Istituto per le applicazioni del calcolo. Ecco come Picone stesso descrive la sua intuizione: *Questa necessità apparve alla mia mente - nonostante il purismo scientifico, sano e fecondo purismo scientifico, inculcatole nella Scuola Matematica pisana, da pochi anni lasciata - quando mi trovai, durante la guerra* 1915–18, *dinanzi ai problemi di tiro che si presentavano alle nostre artiglierie a grande gittata, che operavano sulle Alpi, i quali non potevano essere risoluti se non con l'intervento del matematico. Mi venne così, fin d'allora, l'idea di un Istituto, nel quale matematici, muniti dei più potenti strumenti di calcolo, avessero potuto collaborare con cultori di scienze sperimentali o con tecnici per ottenere la concreta risoluzione dei loro problemi di valutazione numerica.* (Picone, 1955).

Nel 1927 riuscì a realizzare a Napoli l'Istituto per le Applicazioni del

Calcolo (IAC) che, all'epoca, era l'unico centro di ricerca al mondo dedicato allo studio di modelli matematici per le applicazioni. Nel 1932, quando Picone si trasferì a Roma, ottenne la creazione dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo (INAC) nell'ambito del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Per dare un'idea del tipo di attività dell'Istituto, ricorderò che una volta dotatosi del calcolatore FINAC (inaugurato nel dicembre del 1955, alla presenza del Presidente della Repubblica Giovanni Gronchi), l'istituto si occupò di applicazioni richieste dai Ministeri del Bilancio e dell'Aeronautica, dagli Istituti di Fisica Nucleare di Roma (collaborò anche con Enrico Fermi), Milano e Torino e dall'Istituto di Psicologia del CNR. Il calcolo più complesso della FINAC fu la verifica della stabilità della tristemente nota diga del Vajont, che comportò la risoluzione di un sistema di 208 equazioni lineari algebriche. Da sottolineare che la tragedia fu dovuta a una frana dalla montagna sovrastante e che la diga resse all'impatto e alle incredibili sollecitazioni provocate dalla massa d'acqua che superò la diga.

Il terzo matematico di cui voglio parlare è Gaetano Fichera (Acireale, 08.02.1922 – Roma, 01.06.1996), che fu allievo di Picone e mio Maestro. Si laureò nel 1941, a soli 19 anni, e nel 1949 divenne professore a Trieste. Nel 1956 si trasferì alla Sapienza di Roma, dove rimase per tutta la vita.

Si occupò di svariate questioni di Analisi, tra le quali ricordo le Equazioni alla Derivate Parziali e - in particolare - la Teoria matematica dell'Elasticità, l'Analisi Funzionale (fu tra i primi in Italia ad utilizzarla nella teoria delle equazioni alle derivate parziali), la Teoria del Potenziale, le Equazioni Integrali, l'Analisi Complessa, l'Analisi Numerica.

In particolare nella teoria matematica dell'elasticità diede risultati fondamentali. Il principale tipo di problema che questa teoria pone è il seguente: dato un corpo la cui configurazione naturale è rappresentata da un dominio Ω dello spazio, vengono assegnate delle condizioni (forze o spostamenti) e si vuole determinare la configurazione di equilibrio del corpo stesso. Matematicamente si tratta di risolvere un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine in Ω soggetto a certe condizioni assegnate sul bordo di esso. Nei tre problemi classici, il termine noto dell'equazione differenziale considerata in Ω rappresenta le forze assegnate che agiscono sui punti interni di Ω, dette forze di massa. I problemi, poi, si differenziano a seconda delle condizioni che vengono imposte sulla frontiera di Ω: nel primo problema si assegnano gli spostamenti (ad esempio, se abbiamo un corpo incastrato al bordo, questi saranno nulli), nel secondo vengono assegnate le forze superficiali (ossia le forze che agiscono sulla superficie del corpo) e nel terzo vengono assegnati gli spostamenti su una parte della superficie e le forze superficiali sull'altra. Quest'ultimo è detto problema misto.

Orbene, mentre i primi due problemi presentano un grado di difficoltà comparabile ed erano stati trattati in maniera soddisfacente da tempo, il problema misto risulta avere un grado di difficoltà superiore. E fu Fichera che - per primo - dimostrò un teorema di esistenza ed unicità per la soluzione di questo problema in G. Fichera, Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno, relativi all'equilibrio di un corpo elastico, *Ann. Scuola Norm. Super. Pisa*, 35–99 (1950). A tale riguardo, Knops e Payne, nella loro monografia *Uniqueness theorem in linear elasticity*, (Springer Verlag, 1971), così scrivono: *The literature on uniqueness in linear elasticity falls roughly into two periods. The first, initiated a little before the appearance of Kirchhoff's classical theorem in 1859, ended in about 1910. The second, starting say in 1950 with publication of Fichera's paper, still continues to attract interest.*

Ma questo non fu il solo importante problema relativo alla teoria dell'elasticità legato al nome di Fichera. Nel 1959, in un ciclo di conferenze tenute all'Istituto Nazionale di Alta Matematica di Roma, Antonio Signorini pose per la prima volta un problema da lui definito "con ambigue condizioni al contorno", consistente nel determinare la configurazione di equilibrio di un solido elastico soggetto a vincoli unilaterali. Un esempio di problema di questo tipo è quello nel quale si vuole determinare la configurazione di equilibrio di un corpo soggetto alla forza di gravità e che poggia su un tavolo (che funge, appunto, da vincolo unilaterale). Si trattava di un problema assolutamente nuovo, perché le condizioni al contorno sono diverse a seconda se ci troviamo sulla parte della superficie che si appoggia sul tavolo o sulla parte di superficie libera, e la zona di contatto non è nota a priori, ma è una delle incognite del problema.

Picone e Fichera, che assistettero ai seminari di Signorini, capirono subito la novità e l'interesse di quello che poi divenne "il problema di Signorini". In particolare Fichera - sollecitato in questo anche da Picone - si dedicò immediatamente a cercare di ottenere un teorema di esistenza e unicità. E' interessante leggere il lavoro che Fichera scrisse anni dopo (La nascita della teoria delle diseguaglianze variazionali ricordata dopo trent'anni, 1995) nel quale descrive le difficoltà da lui incontrate nel cercare di risolvere questo problema, dato che era di tipo assolutamente nuovo e per il quale non c'era nessun punto di riferimento nella letteratura.

A questo studio Fichera dedicò alcuni anni, studio che Fichera descrive così: *uno degli avvenimenti più importanti nella mia vita di ricercatore e non solo per le gravi difficoltà che mi si presentarono nel corso della sua indagine, ma anche per i risvolti umani che a questa ricerca furono connessi.* Signorini, infatti, in quegli anni si ammalò gravemente e Fichera ricorda che visse *con un vero senso di angoscia* l'ultima parte della sua ricerca. Nel gennaio del 1963 Fichera riuscì a dimostrare il suo teorema di esistenza ed unicità e a comunicarlo a Signorini, esattamente una settimana prima della sua scomparsa.

I risultati furono poi pubblicati nella lunga memoria lincea: G. FICHERA, Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno. *Atti Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Sez. I*, 91–140 (1964).

Questo lavoro segna la nascita della cosiddette Disuguaglianze Variazionali, argomento che è stato in seguito sviluppato enormemente da molti matematici e che ha trovato applicazioni in svariati problemi sia teorici che applicativi. Ancora oggi le Disuguaglianze Variazionali rappresentano un tema di ricerca molto in voga. Così scrive Antman nel 1983:

... the solution of Signorini's problem stood for several years as the main concrete application of the theory to classical physics. As such, it gave promise that the theory had significance beyond the confines of pure analysis. This promise was soon realized. Numerous applications were made to a host of free surface problems in such diverse fields as plasticity, fluid dynamics, plasma physics, filtration, melting, etc. These are described, along with extensive bibliographies, in the texts of Duvaut and Lions (1972), Baiocchi and Capelo (1978), Kinderlehrer and Stampacchia (1980), and Friedman (1983). S. S. ANTMAN*: The influence of elasticity on analysis: modern developments. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 9, 1983, 267–291.*

Non posso concludere questa carrellata di analisti del novecento senza citare - sia pure brevemente, per i limiti temporali del mio intervento - altri due grandi matematici, anche loro allievi di Picone.

Il primo è Renato Caccioppoli (Napoli, 20.01.1904 – Napoli, 08.05.1959), probabilmente il matematico del novecento più noto ai profani, anche grazie al film di Martone a lui dedicato, "Morte di un matematico napoletano". Uomo particolarissimo, univa un carattere scanzonato tipico dei napoletani ad una malinconia tutta russa, sicuramente dovuta alle sue origini (era, infatti, nipote del celebre rivoluzionario russo Michail A. Bakunin).

Si laureò a 21 anni a Napoli, dove visse sempre, tranne un breve periodo (1931–34) quando, diventato professore a soli 27 anni, fu chiamato a sostituire Vitali a Padova. Aveva diversi interessi: la musica (era un ottimo pianista e pare che all'inizio della sua carriera fosse stato in dubbio se intraprendere la carriera musicale o quella universitaria), la letteratura contemporanea francese, l'amore per il cinema che lo portò ad organizzare un cineforum.

Lo scrittore premio Nobel André Gide disse di lui *ce n'est pas un homme, mais une âme*.

Morì suicida nel 1959, senza lasciare alcuno scritto che spiegasse il suo gesto.

I suoi interessi principali furono i fondamenti di quella che oggi si chiama la teoria geometrica della misura (un certo tipo di insiemi viene oggi detto insieme di Caccioppoli), oltre alla teoria dell'integrazione, alle equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali (un lemma detto di Caccioppoli–Weyl risulta essere il primo risultato di regolarità interna per un'equazione alle derivate parziali di tipo ellittico), all'Analisi Funzionale (un teorema di punto fisso a lui dovuto - detto teorema di Banach–Caccioppoli - viene insegnato nei corsi di analisi del primo anno), funzioni analitiche (reali e complesse).

L'altro è Ennio De Giorgi (Lecce, 08.02.1928 – Pisa, 25.10.1996). Nel 1958 vinse la cattedra di Analisi Matematica a Messina. Nel 1959 fu chiamato dalla Scuola Normale di Pisa, dove ha insegnato per quasi quarant'anni. E' stato in Italia il Maestro indiscusso del Calcolo delle Variazioni. Tra i risultati più importanti da lui ottenuti, ricorderò la risoluzione del XIX Problema di Hilbert (ottenuta con tecniche diverse e indipendentemente anche dal celebre John Nash) e la risoluzione del problema di Plateau per insiemi di co–dimensione 1. In particolare, in questi risultati, De Giorgi ha utilizzato concetti introdotti per la prima volta da Caccioppoli. Anche la nozione di Γ–convergenza, che si è rivelata efficacissima nello studio del Calcolo delle Variazioni, è dovuta a De Giorgi.

A me piace anche rimarcare la sua incredibile generosità intellettuale; mentre normalmente i matematici sono molto "gelosi" dei propri temi di ricerca, almeno fino a quando non li hanno risolti, De Giorgi era l'opposto. Ho assistito a diverse delle sue conferenze e spesso non faceva altro che proporre pubblicamente congetture, fornendo quindi materiale di lavoro a tutti quelli che avessero avuto voglia di cimentarsi. Diversi dei suoi ultimi scritti sono dedicati esclusivamente a congetture.

Terminerò questa mia prolusione citando un giovane dei giorni d'oggi, Alessio Figalli, che quest'anno ha vinto la Medaglia Fields, massimo riconoscimento mondiale assegnato a un giovane matematico sotto i 40 anni. In precedenza solo un altro italiano, Enrico Bombieri, lo aveva ricevuto nel 1974. Figalli ha studiato alla Normale di Pisa, è stato allievo di Luigi Ambrosio, a sua volta allievo di De Giorgi, e la parte principale delle sue ricerche si svolge nel Calcolo delle Variazioni. Penso quindi che Figalli, pur non lavorando in Italia, possa essere considerato a pieno titolo un prodotto di quella scuola italiana le cui radici ho cercato di descrivere, e credo che sia una notevole dimostrazione di quanto essa sia sempre viva.