

- 180°? L'ho chiesto...proff... quando un quadrilatero è inscrittibile in una circonferenza, gli angoli opposti... la somma è 180°?
- 139 Insegn: è 180°, sono supplementari!  
(E segna gli angoli di ABCD e poi li misura)
- 140 V: ma perché li segni tutti e 4? Bastavano...
- 141 E: eh, devi vedere la somma, no?
- 142 M: questi 2 (indica D e B) per vedere se sono 180°
- 143 E: ah, sì, è vero, ne bastavano 2
- 144 M: fai "diversi"... "misure"...
- (E misura gli angoli D e B)
- 145 E: 180°, no?
- 146 V+M: sì...86, 94...
- 147 E: aspetta, adesso vediamo: spostiamo e teniamo il punto  
(E trascina il punto C in modo che gli assi continuino a intersecarsi in un solo punto)
- 148 M: così è perpendicolare... 90° e 90°
- 149 V: e sì, guarda gli angoli!
- 150 E: poi...82 e 98 sì...101 e 79 sì... sì, insomma... Beh, comunque la dimostrazione è che... gli assi sono equidistanti dai vertici... quindi questo punto (indica l'incontro degli assi) è equidistante da questi 2 vertici (A e B), ma anche da questi (A e D), anche da questi (D e C) e anche da questi (C e B) ... no?... quindi alla fine... Non è simile a uno che avevamo già fatto?
- 151 V: qualcosa del genere l'abbiamo fatto sicuramente!
- 152 E: forse l'avevamo fatto con le mediane!
- 153 V: sì...qualcosa con le mediane, però non ricordo
- 154 M: l'anno scorso l'avevamo fatto
- 155 O: le bisettrici
- 156 V: ah, le bisettrici!...
- 157 E: è vero, che erano equidistanti dai lati e quindi...
- 158 V: ci avevo pensato prima a... questa storia delle... quando hai un triangolo... nei triangoli hai qualcosa che appunto è... è l'incontro degli assi... però poi ho detto: questo qua è un quadrilatero, non un triangolo, allora ho detto: ma... magari non c'entra niente... dico calolate...

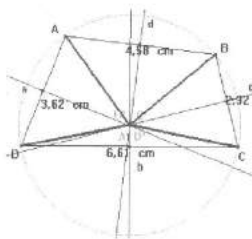


Figura 12

## CAPITOLO SECONDO

## COMPETENZE E NUCLEI IN MATEMATICA

*"Warren", mi chiese "che cosa vuoi diventare nella vita?"; e io risposi: "Non lo so". "E che cosa vuoi fare?"; di nuovo dovetti riconoscere: "Non ne ho idea; ma c'è una domanda alla quale mi piacerebbe trovare risposta: che cos'è un numero, che un uomo può comprenderlo, e che cos'è un uomo, in grado di comprendere un numero?". Egli sorrise e disse: "Allora, amico mio, ne avrai finché campi".*

Warren McCulloch

(Cit. in "Uomini e macchine intelligenti"  
di Jeremy Bernstein)

In questo capitolo si presenta una possibile proposta di competenze e contenuti di matematica per la scuola superiore, con la discussione di metodologie di insegnamento e apprendimento.

## 2.1. LA MATEMATICA PER IL CITTADINO

L'educazione matematica deve concorrere alla formazione culturale degli allievi come cittadini, consentendo loro di partecipare alla vita sociale con consapevolezza, capacità di gestire l'informazione (ricevuta e fornita), capacità critica. Nel documento UMI "Matematica 2001" (UMI, 2001b) si legge: «La formazione del curriculum scolastico non può prescindere dal considerare sia la funzione strumentale, sia quella culturale della matematica: strumento essenziale per una comprensione quantitativa della realtà da un lato, e dall'altro sapere logicamente coerente e sistematico, caratterizzato da una forte unità culturale. Entrambe sono essenziali per una formazione equilibrata degli studenti: priva del suo carattere strumentale, la matematica sarebbe un puro gioco di segni senza significato; senza una visione globale, essa di-

venterebbe una serie di ricette prive di metodo e di giustificazione. I due aspetti si intrecciano ed è necessario che l'insegnante li introduca entrambi in modo equilibrato fin dai primi anni della scuola elementare» (UMI, 2001b).

La matematica si presenta dunque come disciplina portante per l'educazione dei giovani che si inseriscono nella società, perché ha una duplice valenza: strumentale e culturale insieme, che la scuola deve passare loro.

Non sempre l'immagine che un cultore della materia o un ricercatore hanno della matematica corrisponde a quella che ha un ragazzino che impara la matematica sui banchi di scuola, o quella del suo insegnante (di matematica o di altre discipline), o quella che emerge dai mass-media. Queste immagini devono corrispondersi? Forse è naturale che siano diverse, ma quella del giovane non dovrebbe tendere, con il passare degli anni, ad avvicinarsi a quella dello studioso di matematica, per una serie innumerevole di ragioni? Tali ragioni possono spaziare: dal comprendere criticamente le informazioni che provengono dalla società, all'evitare luoghi comuni, distorsioni e anche grossolani errori, dal comunicare attraverso la matematica ad applicare la matematica per il proprio lavoro, fino a lavorare dentro la matematica e a produrre risultati matematici.

Il compito della scuola è proprio quello di trasmettere, insieme ai contenuti, alle tecniche, ai metodi di una disciplina, anche un'immagine della disciplina e una sua collocazione nella storia e nella società. In quale modo? Uno dei più grandi matematici italiani, Federico Enriques, scriveva a favore di un insegnamento dinamico: «il compito che ci è proposto è tremendamente... difficile... bisogna che qualcosa di vivo che è in noi passi nello spirito di lui [lo studente]... Ma per fare ciò occorre dunque che anche noi maestri – nell'atto di insegnare – ripetiamo, non già il risultato freddo degli studi fatti, bensì il travaglio interiore per cui riuscimmo a conquistare la verità» (Enriques, 1921).

La matematica che viene fatta "vivere" allo studente con un insegnamento del tipo proposto da Enriques (e sono tanti gli insegnanti, a tutti i livelli di scuola, che rendono protagonisti gli studenti, calandosi tra loro e diventando essi stessi discenti), rimane anche quando la persona è matura come bagaglio culturale e come strumento di lavoro, di comunicazione, di interpretazione della realtà, altrimenti il rischio è

che si dimentichino in fretta i suoi contenuti, archiviandola con l'affermazione "io non ho mai capito niente".

Lo studio della matematica, invece, «deve arricchire la personalità dello studente affinandone l'aspetto razionale, il gusto alla verità, l'induzione e l'analisi ma anche l'inserimento nella società di oggi tecnologicamente avanzata in cui la scienza ha una parte preponderante» (Maracchia, 1982).

«Se vogliamo fornire una visione equilibrata della matematica del passato e della matematica di oggi dobbiamo proporre ai ragazzi situazioni esemplari di *costruzione* dei concetti legati al loro uso conoscitivo, riflessioni *storiche* e approfondimenti *tecnici* sull'evoluzione interna della matematica, esempi di sviluppo e di ritorno alle applicazioni di concetti matematici importanti, e non concetti già "sistemati" fuori dalla storia» (Boero, 1982).

Più recentemente, per riprendere Boero, possiamo richiamare la metafora della bottega artigiana, che «Serve però a ricordare che l'apprendimento avviene sempre in contesti e che tali contesti devono avere una connotazione problematica affinché ciò che si apprende venga percepito come proprio patrimonio di conoscenza. Altrimenti può rafforzarsi come unico contesto quello del mondo della scuola, visto però come ambiente autoreferenziale dove si apprendono nozioni e pratiche che hanno validità solo all'interno di esso e che presto scompariranno nella vita adulta» (Palma, 2000).

## 2.2. COMPETENZE E NUCLEI

I grandi libri di testo usciti negli anni settanta (ci riferiamo a Prodi, Villani, Speranza, Castelnuovo, Lombardo Radice) sono stati il prodotto di progetti didattici pensati e sperimentati profondamente e criticamente, si sono presentati sul mercato in un periodo di discussione sulla scuola, sulla sua revisione e riforma. Essi hanno avuto una diffusione principalmente nell'ambito dei Nuclei di Ricerca Didattica e tra le persone direttamente coinvolte nei progetti stessi, ma non hanno avuto, nella scuola, un grande numero di adozioni. Eppure chiunque legga quei testi non può che trovarsi d'accordo nel dire che sono eccellenti, per l'unitarietà della progettazione, per gli obiettivi didattici prefissati, per le proposte di attività didattiche e per l'impostazione metodologica.

Non sono stati adottati in massa non perché non siano stati capiti o accolti favorevolmente dal punto di vista didattico, ma perché precorrevano i tempi e la scuola non era ancora pronta a scelte così forti. Infatti, quei testi scardinavano l'ordine sequenziale, contenutistico, onnicomprensivo dei programmi (quelli tradizionali, a quei tempi) per ruotare attorno a nuclei tematici scelti che potevano essere: le trasformazioni in geometria, il collegamento col reale, le strutture e le analogie strutturali tra ambiti diversi, le funzioni. Ne è un esempio l'argomento collocato all'inizio del libro di Prodi, la probabilità: per quanto fortemente motivata dal punto di vista didattico, tale scelta non era (e forse non è ancora oggi) approvata e condivisa dalla maggior parte degli insegnanti.

Tali progetti, anche se non approvati sul versante commerciale, hanno però lasciato nel tempo tracce che ciascuno può riconoscere in ambiti diversi: nella formulazione dei "nuovi programmi di matematica"<sup>1</sup> degli anni 80 e 90 (già concepiti in vista di una riforma della scuola e del suo inserimento in una prospettiva europea), che sono organizzati per grandi temi e hanno dato la possibilità all'insegnante di progettare un percorso, nei nuovi libri di testo degli ultimi trent'anni, che prendono spunto da quelli per il problem solving o nella trattazione di particolari argomenti, come le trasformazioni geometriche.

Il progetto curricolare per la scuola elementare e media proposto dall'UMI (UMI, 2001b) propone delle modificazioni dei programmi che, per quanto riguarda la matematica, sono ancora più spiccatamente in linea con i progetti didattici del passato citati sopra. Oggi quei progetti sono attuali più che mai, perché il loro impianto didattico si basa sulle **competenze** disciplinari e trasversali e sulla scelta di contenuti disciplinari organizzati in **nuclei fondanti** (si veda anche il Rapporto finale del Gruppo Ristretto di Lavoro per il riordino dei cicli, costituito con D.M. 18 luglio 2001 n. 672, presieduto da G. Bertagna, pubblicato in un fascicolo speciale dall'Editrice La Scuola).

«Le competenze (siano esse disciplinari, cioè riferite alla singola disciplina, o trasversali, cioè riferite a più discipline)

<sup>1</sup> Ci riferiamo, per l'insegnamento della matematica, ai programmi P.N.I. e Brocca per le scuole della Direzione Classica, a quelli degli Istituti Tecnici e a quelli degli Istituti Professionali.

rappresentano traguardi raggiungibili nel medio-lungo periodo (mesi, ma anche anni), che integrano aspetti cognitivi e operativi, in un contesto più o meno circoscritto. Importante è che le competenze rimangano in possesso degli studenti in modo svincolato dalla collocazione (o dalle collocazioni) spazio-temporale in cui sono state raggiunte, cioè anche in contesti diversi da quelli in cui sono state apprese e anche in tempi diversi da quelli in cui sono applicate a livello scolastico (dopo la verifica, dopo l'esame, insomma per la vita)». (Robutti, 2001b). Esse devono perciò costituire un bagaglio (non tanto di nozioni, quanto delle abilità di risolvere situazioni problematiche, sapendo scegliere risorse, strategie e ragionamenti) per il cittadino. In tal modo la scuola può effettivamente collocarsi non (solo) come veicolo di trasmissione del sapere, ma soprattutto come «luogo privilegiato, per i giovani, per la costruzione di identità adulta» (Palma, 2000). Tale impostazione non è in contrasto con la strutturazione del sapere in unità didattiche e obiettivi, perché questi ultimi possono essere visti come quei traguardi a breve o medio termine che concorrono, a gruppi, al raggiungimento di una (o più) competenze. Quindi la sfida della riforma della scuola, in presenza dell'autonomia, consiste nel coniugare un progetto a lungo termine con una struttura fine a breve termine, in cui gli obiettivi rappresentano la specificità delle competenze per argomenti (unità didattiche) o per momenti temporali (quadrimestre, o livello scolastico).

Il punto cruciale del raccordo tra gli aspetti di lungo termine con quelli più a breve termine è la scelta dei contenuti, che possono essere organizzati in assi portanti che percorrono l'intero ciclo di formazione: i nuclei, ossia quei concetti fondamentali che ricorrono in vari luoghi di una disciplina e hanno perciò valore strutturante e generativo di conoscenze.

I nuclei fondanti «possono definirsi tali quando assumono un *esplicito valore formativo* rispetto alle competenze di cui sono i supporti». Per poterli individuare, non possiamo rimanere solo sul piano storico-epistemologico, ma dobbiamo «impiegare contemporaneamente *anche* gli strumenti della ricerca psicopedagogica e didattica». È questo il punto chiave su cui occorre riflettere. Infatti, l'aggettivo fondante può essere inteso da diversi punti di vista: quello della disciplina, nei suoi aspetti epistemologici e storici, quello della prassi

didattica e quello della ricerca in didattica della matematica. Evidenziare solo uno o due dei precedenti punti di vista non è sufficiente per la definizione di nucleo fondante della matematica nella scuola: solo l'intersezione di tutti e tre crediamo che possa dar luogo a un progetto compatibile con le più moderne tendenze della ricerca in Educazione Matematica. La ricerca ci fornisce indicazioni su diversi punti cruciali del processo di insegnamento-apprendimento, come per esempio: quali concetti costituiscono momenti di rottura nel processo cognitivo (pensiamo per esempio al passaggio dai numeri naturali ai numeri razionali); quali ostacoli cognitivi ci possono essere nell'apprendimento di un determinato concetto; quali sensi hanno gli studenti sul concetto di dimostrazione; quali campi di esperienza (Boero, 1995) possono favorire il passaggio dall'empirico al teorico; quali strumenti possono supportare gli studenti nella formulazione di congetture e dimostrazioni (Arzarello et. al., 1999a).

### 2.3. UN CURRICULUM DI MATEMATICA FONDATA SU COMPETENZE E NUCLEI

Il percorso progettuale che riguarda la matematica inizia con l'identificazione di quelle competenze trasversali (comuni alla matematica e alle altre discipline) che la matematica concorre a perseguire, come per esempio:

- leggere l'informazione, nelle varie forme espressive in cui può comparire;
- produrre informazione, facendo uso di diverse forme espressive;
- rappresentare informazione;
- porsi e risolvere problemi di vario tipo;
- utilizzare consapevolmente i processi logici, ossia saper condurre un ragionamento in un ambito teorico più o meno elevato, con argomentazioni e giustificazioni;
- utilizzare consapevolmente gli strumenti tecnologici.

Il passo successivo consiste nell'identificare alcune grandi competenze disciplinari, quali:

1. avere il senso del numero;
2. avere il senso del grafico;
3. avere il senso del simbolo;
4. analizzare dati, rielaborarli;

5. costruire modelli a partire da dati e utilizzare modelli per esplorare fenomeni e situazioni;
6. fare previsioni in condizioni di incertezza;
7. risolvere problemi aperti o chiusi;
8. utilizzare il linguaggio e il ragionamento scientifico, fare dimostrazioni.

Si capisce come le competenze disciplinari sopra elencate siano direttamente collegate con le precedenti competenze trasversali, concorrendo al raggiungimento delle stesse, dalla prospettiva disciplinare della matematica.

In particolare, le prime tre contribuiscono al raggiungimento di quelle trasversali che riguardano il leggere, comprendere, rappresentare e produrre informazione.

Per "senso del numero" si intende non solo la conoscenza dei numeri interi, decimali, frazionari, irrazionali, e la capacità di operare con essi (con calcoli mentali, scritti, o con l'aiuto delle tecnologie), avendo la consapevolezza delle operazioni e delle loro proprietà. Ma è di fondamentale importanza per il cittadino possedere la capacità di stima di un ordine di grandezza, di un errore, di cifre decimali significative, e la capacità di determinare una percentuale o di fare calcoli approssimati. Sowder fa i seguenti esempi per rendere l'idea: «Ho sufficiente denaro per pagare questi libri? Di quanto colore ho bisogno per tinteggiare la stanza? Quante persone sono nello stadio? Quanto tempo impiego per arrivare dal dentista? Rispondere a queste domande coinvolge stimare risultati di calcoli, stimare misure, e stimare la numerosità. Ciascuna di esse richiede diversi tipi di comprensione e differenti insiemi di abilità» (Sowder, 1992).

Possedere il senso del numero significa giudicare se il risultato di un esercizio in cui sono coinvolti calcoli su dati iniziali è accettabile o no, senza rifare i calcoli, ma basandosi su una stima dell'ordine di grandezza. A questo proposito scrive Villani: «... prendo lo spunto da un semplicissimo problema di scuola elementare:

**Problema 1.** *Un'automobile consuma 1 litro di benzina ogni 14 km. Quanta benzina è necessaria per percorrere 315 km?*

Chi ha posto il problema si attende, ovviamente, una risposta del tipo:

$$315:14=22,5 \text{ litri.}$$

Ma può capitare che qualche ragazzo ottenga un risultato sbagliato. Per esempio:

2,25 litri (virgola posizionata troppo a sinistra);

225 litri (virgola dimenticata);

21 litri (errore di distrazione: divisione di 315 per 15 anziché per 14);

0,044 litri (inversione di ruoli tra dividendo e divisore: 14 diviso per 315, anziché 315 diviso per 14);

4410 litri (ricorso ad un'operazione sbagliata: moltiplicazione, anziché divisione, di 315 per 14).

Che un ragazzo possa commettere uno di questi errori, o magari un errore ancora diverso, non è poi tanto strano. Quello che a prima vista appare ben più strano è che spesso, in ambito scolastico, chi commette l'errore non se ne rende subito conto, nonostante la palese assurdità del risultato trovato (tra gli errori esemplificati, l'unico che dà luogo ad un risultato con *ordine di grandezza* ragionevole, è il terzo). Mi chiedo: questa stessa insensibilità all'*ordine di grandezza* si manifesterebbe anche in situazioni di vita reale, al momento di rifornimento di benzina ad una stazione di servizio? Credo proprio di no! Già un bambino in prima elementare sa che con un paio di litri di benzina non si va molto lontano e sa anche che viceversa alcune centinaia o addirittura alcune migliaia di litri di benzina sono una quantità del tutto spropositata per un viaggio di poco più di 300 km» (Villani, 1995). E ancora: «Per insegnare ad *usare* la matematica è di fondamentale importanza sfruttare ogni possibile occasione per ri-contestualizzarla, ossia per stabilire collegamenti significativi tra la matematica stessa e il mondo reale» (Villani, 1995). Sono importanti quindi tutte quelle attività in cui gli studenti, lavorando in contesti di apprendimento, hanno la possibilità di farsi un'idea degli ordini di grandezza dei numeri che utilizzano, come misure di grandezze coinvolte, ma anche come numeri in sé.

Per "senso del grafico" si intende non solo l'abilità di rappresentare dati (punti, o funzioni di data equazione) su un grafico, o di leggere grafici, ma più in generale di decodificare la varietà di informazioni contenute in un grafico, sia a livello globale che a livello locale, di produrre grafici per rappresentare funzioni, andamenti, fenomeni, di distinguere tra rappresentazione discreta e continua, di avere sempre presente i fattori di scala (Robutti, 2001c).

Per quanto riguarda il "senso del simbolo", Arcavi ha apportato un enorme contributo alla ricerca da questo punto di vista, mettendo in evidenza come, troppo spesso, gli studenti si dimostrino abili a padroneggiare le tecniche algebriche e a manipolare i simboli, ma si rivelino incapaci di riguardare l'algebra come strumento di pensiero per scoprire e stabilire connessioni, per formulare e validare congetture, per esprimere generalità. Gli studenti possiedono il senso del simbolo per Arcavi, se sono capaci di: ricorrere ai simboli come strumenti per comprendere il significato del problema e per risolverlo, abbandonarli nel momento in cui rischiano di rimanere ancorati alle manipolazioni, cogliere i vari ruoli che essi possono giocare in contesti differenti, leggere attraverso di essi le relazioni esistenti tra le variabili in gioco, scegliendo anche opportunamente il modo nel quale rappresentare queste ultime (Arcavi, 1994).

Uno studio fatto qualche anno fa dalla NAEP, l'ente che negli Stati Uniti valuta le acquisizioni degli studenti, ha rilevato che gli studenti della scuola secondaria generalmente sembrano avere una certa conoscenza dei concetti e delle abilità basilari in algebra e geometria. Però, spesso non sono capaci di applicare tali conoscenze in situazioni di problem-solving, né sembrano comprendere molte delle strutture che stanno sotto tali concetti e abilità.

Gli allievi colmano tale loro incapacità a comprendere, memorizzando regole e procedure e finiscono così inevitabilmente col credere che queste rappresentino l'essenza della matematica: più della metà giudica che l'apprendimento della matematica consista sostanzialmente nel mandarle a memoria. Si formano così generazioni di analfabeti da un punto di vista matematico, che Lolli chiama efficacemente *anumerati* (Lolli, 1992, p.47). Dehaene descrive questo processo drammatico, additando anche le radici neurologiche della faccenda: «... l'innumerismo [analfabetismo numerico, ndr] è lungi dallo scomparire, perché riflette una proprietà fondamentale del nostro cervello: la sua modularità, la compartimentazione della conoscenza matematica in molteplici circuiti parzialmente autonomi. Far bene la matematica significa riuscire a superare questo ostacolo stabilendo una serie di passaggi tra i moduli. L'illetterato dei numeri esegue calcoli a casaccio, per riflesso, senza capire. L'esperto in matematica, invece, si destreggia mentalmente con le notazioni, passa con scioltezza

dalle cifre alle parole, dalle parole alle quantità, e sceglie con cura gli algoritmi di cui dispone in funzione del contesto del problema che deve risolvere. ...

Il buon professore è un alchimista che trasforma un cervello fondamentalmente modulare in una configurazione di rete interattiva. ...

Al contrario le nostre scuole si accontentano spesso d'inculcare un'aritmetica meccanica e priva di senso.

Questo stato di cose è tanto più increscioso perché... prima ancora di andare a scuola, il bambino dispone già di una notevole capacità di approssimazione e di conteggio. Nei corsi di matematica, tuttavia, questo bagaglio matematico informale non sempre viene considerato un fatto positivo ma spesso addirittura un handicap. Secondo un'idea molto diffusa, contare sulle dita è un atteggiamento infantile che una buona educazione ha il dovere di eliminare... Eppure tutta la storia delle numerazioni ha dimostrato che si tratta di un prezioso strumento per assimilare la base 10...

Disprezzare le conoscenze precoci dei bambini può avere un effetto disastroso sul resto della loro carriera scolastica. Questa attitudine fa pensare che la matematica sia una materia arida, staccata da ogni tipo di intuizione, dove regna l'arbitrarietà...

Questa errata concezione del cervello e della matematica in cui l'intuizione è scoraggiata porta al fallimento. ...

Possiamo lottare contro queste difficoltà se costruiamo le conoscenze matematiche nel cervello dei nostri bambini su qualcosa di concreto e non sull'astrazione: facciamo loro capire che le operazioni matematiche hanno un significato intuitivo, che le possono rappresentare con l'aiuto del loro senso innato delle quantità; in breve, aiutiamoli a costruirsi una ricca biblioteca di modelli mentali dell'aritmetica» (Dehaene, 2000, p. 155).

Il punto drammatico è che non solo gli allievi spesso non conoscono il significato delle formule e dei concetti in matematica, ma ne inventano uno fasullo, che surroga quello autentico. Il problema didattico di fondo è che risulta estremamente difficile mettere in crisi tali loro misconcetti, in quanto il significato inventato ha una sua logica, eventualmente radicata in modelli precedentemente appresi e probabilmente basata sulla comoda modularità del cervello di cui parla Dehaene. Il problema è quello di sviluppare una

opportuna didattica in cui gli allievi imparino a diventare padroni del senso vero dei simboli che usano, favorendo la formazione di modelli mentali ricchi in campi di esperienza vari e opportuni. Occorre evitare l'addestramento per pura memorizzazione di regole e meccanismi formali, il quale favorisce invece l'idea che il senso di una formula e delle trasformazioni su di essa consista soltanto nella sua struttura segnica e produce l'idea della matematica come puro gioco linguistico, cui accennavamo nel capitolo 1.

Per entrare nel problema in profondità occorre chiarire in forma precisa che cosa si intenda con parole come: il *sensu* o il *significato* delle espressioni simboliche della matematica, il rapporto di queste nozioni rispetto ai *segni* con cui tali espressioni sono scritte, le dinamiche di pensiero da esse prodotte negli allievi. Il problema va studiato da un punto di vista epistemologico, cognitivo e didattico. Epistemologicamente, occorre distinguere tra *processi* computazionali e *oggetti* astratti: ad esempio, il numero  $(2+3)$  può essere concepito in due modi: operativamente, cioè come processo, e strutturalmente, cioè come oggetto. L'apprendimento cognitivamente avviene in dialettica tra concezioni operative e strutturali della stessa nozione.

Le successive tre competenze (la 4, la 5 e la 6, ovvero rispettivamente analizzare dati, rielaborarli; costruire modelli a partire da dati e utilizzare modelli per esplorare fenomeni e situazioni; fare previsioni in condizioni di incertezza), sono particolarmente importanti per il cittadino e costituiscono la peculiarità della matematica nei rapporti con le altre discipline e con la realtà quotidiana, in quanto promuovono la capacità di interpretare fatti e fenomeni attraverso rielaborazione di dati e la costruzione di modelli.

In questo caso si vede come la matematica si caratterizzi per la tipologia degli strumenti di modellizzazione che mette a punto. La modellizzazione ha un risvolto altrettanto importante, che è la possibilità di fare previsioni, interrogando il modello costruito. E questa competenza si intreccia profondamente con quella di operare in condizioni di incertezza, ossia utilizzare il calcolo delle probabilità.

Purtroppo succede che nella didattica tradizionale spesso i concetti matematici siano presentati «come cose da studiare piuttosto che come modelli. ... A volte, nel motivare l'introduzione di un nuovo argomento matematico, si premette l'il-

lustrazione, esplicitamente semplificata, di un problema "reale", ma in genere è trascurata la fase iniziale della modellizzazione» (Dapueto, 1998). Occorre invece potenziare nella scuola superiore le competenze rivolte alla modellizzazione, sempre per contribuire a formare un cittadino matematicamente accorto e consapevole.

La penultima competenza (risolvere problemi aperti o chiusi) riguarda la risoluzione di problemi posti da altri o da se stessi. In particolare, i problemi che uno studente affronta nella scuola superiore dovrebbero avere enunciati sia chiusi (a richiesta determinata), sia aperti (dove le richieste sono lasciate in forma più libera, ossia si chiede allo studente di esplorare una situazione e vedere quali conseguenze determina al variare delle premesse poste).

L'ultima competenza (utilizzare il linguaggio e il ragionamento scientifico, fare dimostrazioni) contribuisce al raggiungimento di quella trasversale (utilizzare consapevolmente i processi logici), riferendosi all'utilizzo di definizioni alla formulazione di congetture, all'applicazione di proprietà, alla deduzione di enunciati a partire da ipotesi poste, quindi al fare dimostrazioni.

Vorremmo sottolineare due punti che riguardano la scelta effettuata: in primo luogo, queste competenze dovrebbero costituire il bagaglio di uno studente alla fine della scuola superiore, in secondo luogo, esse possono essere costruite solo con una didattica dai tempi lunghi, ossia fondandole già dai primi anni della scuola elementare.

Queste competenze possono essere raggiunte dagli studenti soltanto se la scuola consente loro di fare esperienze in contesti di apprendimento ricchi per la possibilità di essere esplorati, densi di significato per i concetti che coinvolgono, profondi per la possibilità di operare all'interno di una (o parte di una) teoria.

Dalle precedenti competenze, risulta l'individuazione di assi portanti di un "agire" matematico: i nuclei, su cui poggiare la didattica della matematica. Si tratta di scegliere quei contenuti che costituiscono i fili conduttori che conducono al raggiungimento delle precedenti competenze, con inizio nella scuola elementare e prosecuzione nella scuola superiore, in un'ottica di continuità didattica. Potremmo elencarli nel seguente modo:

- Numeri: operazioni;
- Grandezze: misure e modelli;
- Figure: proprietà e trasformazioni;
- Relazioni, funzioni: simboli e grafici;
- Dati: analisi e previsioni.

Tali nuclei vengono identificati sulla base delle loro caratteristiche di: verticalità (sviluppo per l'intero arco di studi, o per una sua buona parte); orizzontalità (possibilità di evidenziare collegamenti tra un nucleo e l'altro); profondità (onde evitare che gli studenti commettano errori dovuti ad applicazioni meccaniche di procedure algoritmiche); avvicinamento graduale alla teoria (a partire dalla percezione, attraverso stadi intermedi di approccio agli oggetti matematici e alle loro proprietà fondamentali).

Nel progetto che viene presentato in questo libro, i titoli dei nuclei lasciano trasparire una scelta metodologico-didattica: quella di costruire, nel corso del curriculum, il significato degli oggetti matematici (per esempio: "numeri"), esplicitando anche gli strumenti teorici con cui si opera su questi oggetti (per esempio: "operazioni"), nell'intento di procedere verso la costruzione di una teoria (se non completa, almeno di parti di essa). L'obiettivo è quello di fornire agli studenti una visione d'insieme sul ruolo di oggetti, operazioni e proprietà<sup>2</sup>.

La scelta di tali nuclei non è dettata da una specificità funzionale alla scuola italiana, ma si colloca nel dibattito sull'Educazione Matematica a livello internazionale.

A questo proposito, possiamo citare per esempio tre progetti particolarmente interessanti: quello americano, quello belga e quello portoghese, tutti con le due caratteristiche che li accomunano tra loro e con la proposta italiana qui fornita: da una parte, la continuità per tutta la formazione pre-universitaria, (vengono scelti contenuti da sviluppare in verticale dal primo anno di scuola di base all'ultimo di scuola secondaria), dall'altra la selezione di grandi assi portanti della formazione matematica. Il progetto americano (NCTM, 2000) costituisce un ottimo esempio di strutturazione vertica-

<sup>2</sup> Il titolo ovviamente non può indicare in maniera esaustiva le costruzioni teoriche che si possono fare sugli oggetti. Per esempio, sulle figure geometriche si può costruire la geometria euclidea, quella delle trasformazioni o quella analitica. Quindi, le parole contenute nel titolo hanno solo il ruolo di richiamare alcuni possibili costrutti teorici, non tutti.

le dell'insegnamento della matematica, dalla scuola primaria alla secondaria, evidenziando che si possono scegliere nuclei comuni a tutti i livelli scolari, ossia per studenti di età compresa fra i 6 e i 18 anni. La struttura viene realizzata fissando i nuclei e poche competenze fondamentali, quindi specificando obiettivi intermedi, a seconda dell'età degli studenti. La commissione di matematici americani ha scelto dieci nuclei, suddivisi in due gruppi di cinque ciascuno: il primo gruppo è di carattere tipicamente contenutistico, mentre il secondo è più metodologico. Appartengono al primo gruppo:

*Numeri e operazioni;*

*Relazioni, Funzioni e Algebra;*

*Geometria e Senso Spaziale;*

*Misura;*

*Analisi di Dati, Statistica, e Probabilità.*

Mentre appartengono al secondo gruppo:

*Problem-solving;*

*Ragionamento e Dimostrazione;*

*Comunicazione;*

*Collegamenti;*

*Rappresentazioni.*

Il progetto belga (CREM, 1999) invece è caratterizzato da nuclei di tipo prettamente contenutistico, che sono:

*Grandezze;*

*Numeri;*

*Geometria;*

*Algebra;*

*Statistica e probabilità;*

*Analisi.*

La commissione belga ha differenziato il livello di presentazione didattica a seconda della scuola primaria o dei tre diversi livelli della scuola secondaria.

Il progetto ministeriale portoghese ha come obiettivo la matematica per tutti: «La matematica costituisce un patrimonio culturale dell'umanità e un modo di pensare. Il suo apprendimento è un diritto di tutti. Detto questo, sarebbe impensabile che non si desse a tutti l'opportunità di apprendere la matematica in un modo realmente significativo, come sarebbe inconcepibile eliminare dalla scuola di base l'educazione letteraria, scientifica o artistica» (Abrantes et al., 1999). Definite le principali competenze, il progetto portoghese individua quattro nuclei contenutistici:

*Numeri e calcolo;*

*Geometria;*

*Statistica e probabilità;*

*Algebra e funzioni.*

Le grandezze e le misure sono inserite all'interno della geometria, le equazioni all'interno dell'algebra, mentre la ricerca di regolarità e il ragionamento proporzionale sono all'interno dei numeri.

Oltre alla dichiarata continuità didattica in tutto il percorso scolare, i tre progetti si contraddistinguono per la ricchezza di esempi di attività didattiche, suggerimenti metodologici e riferimenti diretti al mondo della scuola, e infine per l'esplicitazione degli obiettivi di fondo del progetto. Tutti sono stati realizzati con un forte contributo della ricerca in Educazione Matematica e risentono dei suoi principali risultati.

I progetti si differenziano per la tipologia dei nuclei: mentre il primo considera nuclei di tipo contenutistico alla pari di nuclei di tipo metodologico, il secondo e il terzo scelgono solo nuclei di tipo contenutistico, asserendo che la metodologia viene considerata trasversale ai contenuti, e traspare dalle competenze e dagli obiettivi fissati. Inoltre, mentre il progetto americano è molto strutturato, con scansione fine di competenze e obiettivi, quello belga e quello portoghese hanno una struttura più aperta e flessibile.

#### 2.4. LE METODOLOGIE

In questo paragrafo si intende accennare alle principali metodologie didattiche, senza avere la pretesa di esaurire l'argomento, che è quanto di più ampio ci sia nel dibattito riguardante la ricerca e la pratica in Educazione Matematica.

Fino a non molti anni fa, la metodologia didattica nettamente dominante nella scuola superiore era la lezione frontale. Tale pratica ancora oggi occupa un grande spazio nel panorama scolastico, ma stanno diffondendosi sempre di più altre metodologie che ad essa si affiancano, come il lavoro di gruppo, basato sul problem-solving, la discussione matematica, il lavoro in laboratorio. Una quindicina di anni fa, i corsi di formazione del Piano Nazionale per l'introduzione dell'Informatica nella scuola superiore (PNI) molto fecero per introdurre, oltre all'integrazione disciplinare di informatica e matematica, an-

che un profondo rinnovamento nelle metodologie didattiche. Il lavoro di gruppo, la discussione, il problem solving erano parte integrante dei corsi di formazione per insegnanti, in cui venivano introdotti con lo scopo di essere poi trasferiti nella pratica didattica in classe con gli studenti.

La lezione frontale si presenta come la tecnica più sicura per gli insegnanti, i genitori, gli allievi, i capi d'istituto, in quanto garantisce che si "finisca il programma". Consiste nella spiegazione, da parte dell'insegnante, delle varie parti del programma, alla cattedra o alla lavagna, è seguita da una serie di attività applicative (gli esercizi ripetitivi, in classe e a casa). La lezione spiegata è studiata a casa dagli allievi e viene richiesta nelle interrogazioni orali, o nelle prove scritte.

Spesso lo studio dei ragazzi si basa unicamente sugli appunti dettati dall'insegnante o presi dagli allievi durante le spiegazioni, e il libro di testo è unicamente finalizzato a contenere migliaia di esercizi di applicazione di tecniche, non a essere consultato per quanto riguarda la parte teorica. La sicurezza di avere un monte-ore a disposizione per svolgere un certo numero di argomenti, e di avere una parte di queste ore da predisporre per la valutazione, è il pilastro su cui si è retta e si regge la modalità tradizionale di "fare scuola".

Questa modalità ha caratterizzato per molto tempo e caratterizza tutt'oggi l'insegnamento della matematica, ed è basata su un modello di scuola che attua la trasmissione del sapere, in cui quindi l'insegnante ha un ruolo di ripetitore di un sapere strutturato, sistemato, formalizzato. Non pensiamo che tutto ciò sia da buttare e da sostituirsi totalmente, perché anche la lezione frontale ha una sua valenza didattica: nell'abituare gli studenti a prestare attenzione a una spiegazione, a imparare a prendere appunti in maniera autonoma quando una persona parla, sviluppando competenze di sintesi e di organizzazione dell'informazione, a comprendere un discorso fatto da un esperto su un argomento matematico, ecc. Ma non è (e non deve essere) l'unica metodologia di insegnamento/apprendimento in classe. Essa andrebbe affiancata, integrata, alternata ad altre metodologie, che sviluppano altre competenze negli studenti.

Per esempio, l'*insegnamento per problemi* è assolutamente fondamentale come approccio alla costruzione del sapere, non solo nella matematica. Consiste nel porre problemi agli studenti, facendoli loro risolvere singolarmente, a gruppi, a

casa o in classe, in tempi lunghi o brevi. Per problema non intendiamo solo la richiesta di ottenere un risultato a seguito di una serie di calcoli, ma la proposta di riconoscere una situazione problematica di ampia natura, formulata da altri: può trattarsi di un classico problema che ha caratterizzato la storia della matematica, o di un problema sorto da un contesto scolastico, oppure da un contesto extrascolastico, ambientale per esempio, o sportivo, o di vita quotidiana.

Risolvere problemi posti da altri è certamente una competenza ambiziosa e a lungo termine, da perseguire fin dalla scuola dell'infanzia, ma non è l'unica in questo ambito metodologico. Altrettanto fondamentale è infatti il *porsi problemi*, ovvero acquisire a poco a poco l'abitudine a porsi criticamente nei confronti della matematica, della scuola, del mondo, per diventare cittadino che utilizza la matematica da persona ragionevole, che ne domina le tecniche e non si fa dominare invece da esse. Per questo, l'insegnamento dei contenuti di tutti i nuclei fondanti deve poggiarsi sulla problematicità, quindi non perseguire solo il raggiungimento di abilità tecniche, bensì di ragionamento.

Nel documento UMI leggiamo che porsi e risolvere problemi significa «impegnarsi in un compito per il quale la "soluzione" non è nota in precedenza (per chi si trova di fronte alla situazione problematica). Soluzione di un problema deve essere naturalmente intesa in senso lato ovvero sia come una risposta al quesito sia come un percorso risolutivo che a tale risposta conduce. Porsi un problema vorrà dire comprendere la situazione descritta, esplorare le cause e la sorgente degli eventi interessati, assimilare i dati e le conoscenze ad essi associate, chiedersi quali siano le "conseguenze" della situazione, così come è descritta ed in caso di modifiche, sia aggiuntive sia solo interpretative, individuare gli elementi significativi. Per risolvere un problema si dovrà dar fondo alle proprie risorse, cimentarsi in campo aperto, esplorando fra le conoscenze possedute alla ricerca di quelle utili allo scopo del momento, sviluppare nuove conoscenze, variare i modi di utilizzare le conoscenze, compenetrare le conoscenze, arricchite, nel problema, discernere fra dati significativi (alla strategia risolutiva) e dati ridondanti, individuare eventuali dati mancanti e necessari al lavoro, controllare il processo risolutivo in riferimento all'obiettivo da raggiungere ed alla validità del prodotto ottenibile» (UMI, 2001b).

Gli studenti possono imparare a porsi e risolvere problemi sia in gruppo che singolarmente. Pur perseguendo la stessa finalità, il lavoro di gruppo, rispetto a quello individuale, persegue anche altre finalità di tipo comportamentale, come il saper stare con gli altri, discutere in gruppo, rispettare l'opinione dell'altro e anche saper difendere la propria opinione, argomentando e dibattendo.

È fondamentale quindi, come metodologia di classe, il lavoro in piccoli gruppi (a seconda dei casi, possono essere di due, tre o quattro persone). La scelta dei raggruppamenti da parte dell'insegnante può essere di vario genere, e oscilla tra le due polarità: gruppi eterogenei o gruppi omogenei. Il criterio dell'equi-eterogeneità, cioè di avere in una classe tutti gruppi ugualmente ripartiti per livello e competenze, consente di avere gruppi che si equivalgono, all'interno dei quali sono presenti forze eterogenee: per esempio uno studente di livello alto, uno di livello basso, ecc. Lo svantaggio può essere nel lavoro all'interno del gruppo, in cui può capitare che lo studente di livello più basso, o quello più timido, non partecipino alla discussione e rimangano in disparte. I gruppi omogenei hanno il vantaggio di avere, all'interno del gruppo, studenti con pari livello, e quindi consentire discussioni alla portata di tutti; ma, se il lavoro di gruppo è seguito da un momento di *intergruppo*, in cui si confrontano i risultati dei vari gruppi, l'eterogeneità fra i risultati raggiunti potrebbe scatenare fastidiosi confronti tra gli studenti.

C'è di più: il lavoro collaborativo e quello cooperativo finalizzati al raggiungimento di un obiettivo comune sviluppano la capacità di mettere in gioco e coordinare le competenze di ognuno, riconoscere una leadership, dividersi i compiti e finalizzare il proprio operato all'obiettivo da raggiungere. Nel lavoro a gruppi si stabilisce uno spirito di interdipendenza positiva, in cui il successo di uno è strettamente collegato al successo di tutti. Agli studenti viene richiesta una responsabilità anche individuale nell'acquisizione delle competenze e delle conoscenze utili ad affrontare il compito proposto. Può essere utile distinguere, a grandi linee, almeno due differenti modalità: quella del *cooperative learning*, e quella del *collaborative learning*. Per *cooperative learning* si intende un gruppo di individui che lavora a un problema complesso, nel quale i compiti di ciascuno sono ben individuati e definiti, ma nel quale ogni individuo è aiutato dai suoi compagni di

gruppo nell'affrontare i temi e problemi che sono oggetto e spunto di apprendimento. Per *collaborative learning* si intende un gruppo di individui che lavorano insieme su un compito o un problema che è stato posto al gruppo e che si prevede debba essere affrontato e risolto insieme, attraverso lo strumento della discussione e della condivisione delle strategie risolutive.

I fattori che influenzano sia il *collaborative*, sia il *cooperative learning*, possono essere: la volontà di chi apprende di partecipare al lavoro di gruppo; la presa di coscienza da parte di chi apprende e dai tutor (siano essi compagni o docenti) dei benefici di forme di apprendimento collaborative o cooperative; un sistema di valutazione che favorisca la cooperazione, la collaborazione e coinvolga lo studente nella propria valutazione, la presa di coscienza del fatto che chi apprende può controllare e gestire il proprio apprendimento.

A seguito del lavoro di gruppo, come in altri momenti del lavoro scolastico, è importante dedicare opportuni spazi alla *discussione matematica*, intesa come «polifonia di voci articolate su un oggetto matematico (concetto, problema, procedura, ecc.) che costituisce un motivo dell'attività di insegnamento-apprendimento» (Bartolini Bussi, 1996).

In essa, l'insegnante ha un ruolo di guida nel senso che: «inserisce una particolare discussione nel flusso dell'attività della classe; influenza la discussione in modo determinante, inserendosi con interventi mirati nel suo sviluppo» (UMI, 2001b). Ma è anche possibile far intervenire nella discussione voci di persone che non fanno parte della classe, come per esempio voci dalla storia, attraverso la lettura di un loro testo scritto, oppure voci dalla realtà esterna, attraverso un testo scritto, una audio-registrazione, una video-registrazione o una tele-conferenza. Rimandiamo al testo dell'UMI per le specificità che può avere la discussione matematica, ricordandone la valenza didattica, culturale e sociale per l'apprendimento.

Il lavoro di gruppo o individuale finalizzato alla risoluzione di un problema, o la spiegazione stessa dell'insegnante, possono servirsi del laboratorio per avere strumenti, ambienti, metodi utili all'espletamento di un compito, all'introduzione di concetti nuovi, alla costruzione sociale del sapere.

La nozione di *laboratorio di matematica* si presta ad interpretazioni diverse. Come ha detto Chiappini nel Convegno

UMI sui programmi di matematica (Ischia, novembre 2001), il laboratorio di matematica può essere visto come uno spazio fisico attrezzato dentro la scuola, caratterizzato da determinati strumenti e da un metodo di lavoro nell'ambito di specifiche attività che testimoniavano quanto di innovativo veniva realizzato in quella scuola all'interno del curriculum di matematica. Secondo questa interpretazione, il laboratorio di matematica viene usato dagli insegnanti in particolari momenti del curriculum scolastico per esemplificare attraverso strumenti specifici qualche fenomeno matematico o per sviluppare con gli alunni qualche attività didattica innovativa, in genere di breve o media durata, che viene inserita nella programmazione didattica della classe e che affianca altre attività di tipo tradizionale. Secondo un'altra interpretazione il laboratorio di matematica può essere visto come una metodologia di lavoro che deve caratterizzare lo svolgimento del curriculum e che si avvale di strumenti specifici per consentire agli studenti di sviluppare esperienze matematiche operando all'interno di campi di esperienza (matematici o extra-matematici) basati su un forte valore culturale e formativo. In tal senso, il laboratorio di matematica caratterizza il modo in cui viene sviluppata la pratica didattica con la classe, è basato sul fare, sulla rielaborazione e sul confronto relativo ai processi e ai prodotti sviluppati operando nel campo di esperienza. Secondo questa accezione lo spazio in cui prende vita il laboratorio di matematica è lo spazio dove la classe di volta in volta sviluppa l'esperienza matematica; spazi che non coincidono necessariamente con quelli utilizzati per lo sviluppo del laboratorio (cortile della scuola, aule attrezzate con strumenti specifici, ...) vengono considerati come naturali estensioni dello spazio-classe.

Entrambe le concezioni di laboratorio di matematica, pur profondamente diverse, intendono perseguire esperienze di innovazione didattica nell'ambito del curriculum di matematica, e presentano punti di forza e di debolezza. Di certo, negli ultimi anni, con la presenza di nuove tecnologie facilmente trasportabili, sia il materiale povero che l'informatica possono essere a disposizione degli studenti nello spazio-classe, che diventa quindi sia classe che laboratorio. Vogliamo quindi sottolineare l'importanza dell'attività di laboratorio come abitudine di lavoro, da non separare, sia come attività, sia come metodi, dalle altre attività di classe.

Nell'ambito del laboratorio, si può realizzare un metodo particolarmente utile per insegnare agli allievi a cogliere il significato della simbolizzazione e dell'uso delle formule matematiche: l'*apprendistato cognitivo*, che non va confuso con l'apprendistato pratico. Quest'ultimo è basato su uno specifico metodo di apprendimento basato su tre momenti successivi: l'osservazione, la strutturazione, la crescente capacità pratica. L'apprendistato cognitivo mira anche all'acquisizione di processi ed abilità cognitive e metacognitive: l'esperto può modellare e strutturare l'attività del principiante, che osserva l'esperto, confronta e valuta rispetto alle proprie attività intellettuali. L'apprendistato diventa cognitivo in quanto si riesce a bilanciare la dialettica tra l'azione strutturatrice e facilitatrice dell'intervento dell'esperto e la sfida che un problema da risolvere rappresenta per il principiante.

L'analogia è con la bottega d'arte del Rinascimento o con l'apprendimento dei linguaggi di programmazione nel laboratorio di informatica (e quindi la bottega della matematica). Nella bottega di matematica si coltiva un insegnamento sensato della medesima non solo per dire insegnamento coerente e non cervellotico ma soprattutto per indicare un insegnamento-apprendimento mirato a fare cogliere agli allievi il senso e il significato dei simboli e delle formule che usano. L'apprendistato cognitivo supporta diversi processi di apprendimento, che vanno dal problem solving all'imitazione dell'esperto, e favorisce proprio l'acquisizione di quei modelli mentali così importanti perché anche per i nostri allievi i simboli della matematica siano acquisiti quali amplificatori delle capacità raziocinanti dell'uomo e non come misteriose regole da eseguire supinamente. Nella bottega di matematica si coltiva così per esempio il senso delle formule: esso è sempre legato a ciò che gli allievi fanno (spontaneamente o perché eseguono un compito), alle loro interazioni con l'insegnante, i loro compagni, il sapere, ecc. Il senso non appartiene ad una formula come tale, ma in quanto è stata costruita in una certa situazione, ecc., è quindi frutto di un'attività. Il senso però non ha un carattere soggettivo; è il risultato di un'attività sociale e condivisa degli allievi. Non si tratta di fare cose diverse o in più rispetto a quelle che di solito si fanno; si tratta solo di farle con una prospettiva, una metodologia e in un contesto diversi.

Dalle varie metodologie citate, si vede bene che intedia-

mo l'attività matematica in classe come fortemente basata su un apprendimento sociale, come fondamentale per costruire un sapere condiviso dagli studenti sia come componenti della classe, sia come cittadini, ma anche per raggiungere competenze comportamentali, come per esempio il saper lavorare con gli altri, rispettare le opinioni altrui, ecc.

## 2.5. NUMERI: OPERAZIONI

L'aritmetica, "regina della matematica" secondo Gauss, occupa nei programmi attualmente vigenti un posto effettivamente importante nella scuola materna, nella scuola elementare e nella media. Nell'attuale scuola superiore la sua trattazione decresce di importanza dai primi agli ultimi anni, per lasciare il posto all'analisi nella fase conclusiva di alcuni tipi di scuole. Quale parte dell'aritmetica è da considerarsi fondamentale per la scuola superiore? Bisognerebbe sicuramente dare l'idea della costituzione degli insiemi numerici per ampliamenti successivi, a partire da quello dei numeri naturali fino a quello dei numeri razionali, per fornire poi dei cenni sulla "rottura" che si determina nella definizione dei numeri reali, lasciando all'università il compito di farne una trattazione teorica esaustiva. Eventualmente, e forse solo in particolari indirizzi, si possono trattare i numeri complessi, facendone vedere i legami profondi con altri campi della matematica o delle discipline scientifiche.

Questa impostazione, di approfondimento teorico, non dovrebbe costituire l'approccio iniziale allo studio degli insiemi numerici, ma il punto d'arrivo di un percorso che, collegandosi con i campi di esperienza dei livelli scolari precedenti, ha come punto di partenza attività euristiche nei vari insiemi. Per esempio, nell'insieme dei numeri naturali, sono molte le questioni problematiche da porre agli studenti su regolarità numeriche, proprietà di sottoinsiemi di numeri naturali, di particolari sequenze, relazioni tra numeri pari o dispari e somme di particolari numeri naturali, chiedendo loro di scoprirle, di formalizzarle o di costruirne di proprie. Vi è poi un campo particolarmente ricco di attività congetturali: i numeri primi, che fondano le problematiche sui divisori e sulla scomposizione dei numeri naturali, ma possiedono anche proprietà intrinseche (pensiamo all'infinità dei numeri primi)

che possono essere oggetto di dimostrazione, nonché di riflessione storica (pensiamo al contributo di Euclide sull'infinità dei numeri primi).

Quindi lo studio dei numeri e delle loro proprietà può costituire un asse portante dell'insegnamento della matematica in tutto il percorso scolastico, può essere sviluppato attraverso attività euristiche, che culminino in una riflessione teorica e critica sui numeri, contestualizzando storicamente il dibattito dell'800 e del primo 900 sui fondamenti della matematica.

Le attività euristiche hanno come scopo quello di abituare gli studenti a indagare su problematiche connesse con i numeri, provando per casi, formulando congetture, confutandole con ricerca di controesempi o dimostrandole, in una teoria che si costruisce a poco a poco e che diventa patrimonio comune della classe. L'aritmetica «sopravviverà certamente nel terzo millennio» (Ferrari, 1999) e sarà affiancata da una parte da attività che la rendono attuale (uso delle tecnologie per indagare nel campo dei numeri, applicazioni delle teorie dei numeri nella vita reale), dall'altra sarà contestualizzata nella teoria, con collegamenti con gli altri nuclei. Anzi, l'aritmetica può costituire proprio l'ambiente in cui avviare gli studenti al pensiero teorico, nel senso di far loro costruire le prime dimostrazioni.

Al fine di perseguire la competenza del senso del numero, occorre favorire in classe non solo attività indirizzate verso l'esattezza (del numero o del calcolo), ma anche verso l'approssimazione (del numero o del calcolo), come abbiamo detto a proposito delle competenze. Ciò allo scopo di rendere gli studenti consapevoli principalmente di due questioni, una legata all'altra: l'ordine di grandezza e il controllo sullo strumento automatico che è utilizzato per risolvere problemi o effettuare calcoli. Apprendere a valutare l'ordine di grandezza è un compito che può risultare piacevole per gli studenti, se è inserito in opportuni campi di esperienza fin dalla scuola elementare, e affiancato dalla progressiva costruzione della misura o della stima di grandezze di riferimento da utilizzare per stimarne altre. Tutto ciò crea un ponte molto forte tra il nucleo dei numeri e quello delle grandezze, e costituisce un patrimonio utile al cittadino, in quanto gli fornisce elementi quantitativi da utilizzare nella vita quotidiana, dalla realizzazione di attività pratiche alla lettura delle notizie dei giornali.

Raggiungere la competenza del senso del numero significa anche possedere elementi di controllo sui calcoli effettuati (a mano o con calcolatrici), ovvero saper valutare l'ordine di grandezza del risultato rispetto al problema posto, e quindi saper cercare l'errore.

Nel corso della scuola superiore lo studente dovrebbe arrivare a rendersi conto delle differenze profonde tra gli insiemi numerici astratti, quelli della matematica, e gli insiemi numerici che si utilizzano nelle scienze sperimentali, o nell'informatica (i numeri-macchina), per poterli gestire nel modo appropriato e non confonderli tra loro, soprattutto per quanto riguarda le loro proprietà. Alla base di tale competenza, vi è come contenuto la distinzione tra discreto e continuo.

I contenuti da sviluppare in questo nucleo dovrebbero percorrere i vari insiemi numerici, approfondendone le caratteristiche attraverso metodologie di problem solving, congettura e dimostrazione, con attività degli studenti in piccoli gruppi e discussioni collettive con tutto il gruppo classe.

I contenuti essenziali concernono aspetti di cardinalità e ordinalità dei numeri naturali, richiami espliciti alle proprietà delle operazioni, numeri primi, divisori e multipli, valori assoluti, percentuali, successioni di numeri, progressioni, potenze e radici, esponenziali e logaritmi, elementi di calcolo approssimato, i numeri-macchina in una calcolatrice o in un software algebrico-simbolico (Robutti, 2001a).

Particolare attenzione va posta nello studio di segni e numeri particolari, come: il segno  $=$ , i segni  $+$  e  $-$ , il segno di frazione, i numeri  $0$ ,  $1$ ,  $\pi$ ,  $e$ ; occorre costruire in modo profondo i significati di questi simboli o di questi numeri, collegandoli anche con il processo storico che ha condotto alla loro introduzione, per non dimenticare la dimensione culturale, storica ed epistemologica della matematica. Infatti, «approfondire i numeri significa anche osservare più approfonditamente gli irrazionali, per riconoscere quelli che sono radici di un'equazione polinomiale a coefficienti interi (i numeri algebrici) e quelli che non lo sono (i numeri trascendenti, come  $\pi$  ed  $e$ )» (CREM, 1999).

Affrontare come contenuti potenze e radici, esponenziali e logaritmi, non significa insistere per mesi sulle espressioni che vanno risolte tramite l'applicazione delle loro proprietà, bensì insistere sulla loro valenza come strumenti di calcolo (sottolineandone quindi l'importanza a livello stori-

co), come strumenti per rappresentare dati, come riferimenti per modellizzare situazioni (intrecciando gli aspetti numerici con quelli funzionali). Queste situazioni costituiscono modelli di fenomeni reali, in collegamento con altre discipline scientifiche come la fisica, la medicina, la biologia o l'economia.

In alcuni indirizzi di scuole, possono essere affrontati argomenti a un più elevato livello di profondità, come per esempio: il principio di induzione, la ricorsione come approccio teorico e come struttura algoritmica e le sue differenze dall'iterazione, l'unità immaginaria, i numeri complessi. Di nuovo questi argomenti possono avere degli espliciti richiami alla storia della matematica (pensiamo ai numeri di Peano, all'introduzione dei numeri complessi), o al pensiero teorico (le dimostrazioni per induzione, le dimostrazioni con i numeri complessi, i loro legami con l'algebra e con la geometria).

## 2.6. GRANDEZZE: MISURE E MODELLI

La misura fa parte della vita quotidiana di adulti e ragazzi. Usando strumenti di misura, si possono raccogliere dati, da utilizzarsi con una varietà di tecniche, allo scopo di descrivere quantitativamente il mondo che ci circonda. A scuola, la misura aiuta gli studenti a collegare ambiti matematici con ambiti di altre discipline, nello sforzo di costruire strumenti interpretativi della realtà. Scriveva Speranza durante il dibattito sui programmi PNI negli anni 80: «Sono favorevole a un approccio "integrato" dei vari temi della Matematica: ma è consigliabile anche un lavoro coordinato con altre discipline: con la Fisica, anzitutto attraverso le grandezze e le misure» (Speranza, 1989). Per questo occorre che gli studenti misurino diversi tipi di grandezze, progettando anche esperimenti di misura, per passare poi a descrivere quantitativamente i loro risultati, in un processo che dovrà portare, nella parte finale dei loro studi, a comprendere le differenze tra la misura come procedimento pratico, tipico delle scienze sperimentali, e la misura come teoria, tipica della matematica, collegata con i grandi nodi concettuali che l'hanno contraddistinta storicamente e che riguardano i numeri reali, l'analisi, la probabilità.

Come il nucleo dei numeri, il nucleo misura si potrebbe definire completamente verticale, nel senso che coinvolge tutti gli anni del percorso scolastico di un allievo, e completamente orizzontale, nel senso che ha legami e collegamenti con tutti gli altri nuclei (oltre che, naturalmente, con le altre discipline e con la realtà esterna).

Il nucleo delle grandezze e misure persegue le competenze, a livello di biennio, di effettuare misure e di rielaborare dati di misura (in contesti matematici e non), utilizzando diverse modalità rappresentative o di calcolo, in un processo di continuità con la scuola elementare e media. Occorre inoltre gettare le basi per due tipi di attività da sviluppare nel triennio: la modellizzazione, legata a interpretare matematicamente situazioni della realtà circostante e la costruzione di una teoria. Nel triennio, infatti, è indispensabile potenziare negli allievi la padronanza del significato della misura, riferita a contesti matematici o a contesti esterni, insieme con la capacità di operare con numeri reali o decimali.

Lo sviluppo del nucleo coinvolge diversi aspetti, che sono integrati tra loro, e che devono essere evidenziati dall'insegnante nel corso delle attività. Il primo è l'aspetto strumentale, che viene messo in gioco nei procedimenti di misura, quando si rende necessario identificare le grandezze misurabili, le unità di misura, il processo di misura, la scrittura della misura. È opportuno che l'insegnante sottolinei, in questa fase, il grado di affidabilità dello strumento, qualunque esso sia (dal centimetro da sarta, al calibro, al software), onde evitare, da parte degli allievi, errori di utilizzo, di interpretazione o di scrittura della misura. Un altro aspetto è quello operativo, che viene messo in gioco nella gestione dei dati di misura, quando si rende necessario scrivere la misura tenendo conto dell'incertezza, strumentale o calcolata, oppure nelle stime di misura. Ultimo, ma non meno importante, è l'aspetto teorico, che viene messo in gioco in attività di costruzione del significato della misura di una grandezza, fondato sui numeri reali per quanto riguarda la matematica (misura come funzione che associa un numero reale non negativo a una grandezza) e sui numeri decimali finiti per quanto riguarda le scienze sperimentali.

È opportuno tenere presente che certi argomenti tradizionali, sviluppati in modo sovrabbondante su alcuni libri di te-

sto, andrebbero ridimensionati, per esempio i calcoli pedanti su perimetri, aree e volumi di grandezze geometriche, spesso semplici pretesti per fare eseguire operazioni di una certa complessità, non indirizzati verso la costruzione di significati, ma unicamente verso i meccanismi del calcolo.

Il nucleo contribuisce a fondare le competenze del senso del numero, del grafico e del simbolo, oltre che il risolvere problemi o il modellizzare.

Costituiscono nodi concettuali di fondamentale importanza, da svilupparsi nel corso della scuola superiore, i seguenti, che sono tipici della misura nelle scienze sperimentali:

- la scrittura della misura di una grandezza come numero, seguito da un'unità di misura e da un intervallo di incertezza, che ci dà indicazione su quando affidabile sia la misura;

- l'identificazione dell'intervallo di incertezza, che potrebbe basarsi semplicemente sulla sensibilità dello strumento di misura, oppure sul calcolo di propagazione dell'incertezza sulle misure dirette, se la misura della grandezza avviene indirettamente, a partire dalla misura diretta di altre grandezze; e i seguenti, che sono tipici della misura in matematica:

- gli assiomi che definiscono la misura come funzione a valori nell'insieme dei numeri reali non negativi, che gode della proprietà additiva;

- la misura come funzione che associa esattamente un numero reale (e non un intervallo) a un insieme misurabile.

Questi nodi concettuali possono essere trattati attraverso una serie di contenuti essenziali, quali: la misura di grandezze, la scrittura di una misura, le cifre significative, l'intervallo di incertezza assoluta di una misura, l'incertezza relativa, l'additività della misura, le misure in geometria: lunghezze, aree, volumi tramite procedimenti approssimati ed esatti, la determinazione approssimata di  $\pi$ , grandezze commensurabili e incommensurabili, i modelli funzionali e le loro rappresentazioni e simbolizzazioni.

Argomenti da sviluppare in alcuni indirizzi di scuola secondaria possono essere: il significato di integrale per la misura di lunghezze, aree, volumi, la probabilità come misura, le proprietà della misura.

Per fare esempi di collegamenti tra il nucleo sulla misura e quello sulle funzioni, possiamo citare: la simbolizzazione di proprietà e regole del calcolo algebrico, visualizzata geometricamente da segmenti, rettangoli, parallelepipedi; la messa

in formula di una relazione trovata sperimentalmente dalle misure di due grandezze, per esempio, di una proporzionalità diretta, oppure la formula di area o volume di un solido; la modellizzazione di situazioni problematiche, come per esempio la determinazione della retta di regressione in un fenomeno descritto da una legge lineare. In queste attività, è utile, ai fini del controllo dell'errore, l'analisi dimensionale. Per esempio, quando si risolvono problemi di geometria o trigonometria, indicando con  $x$  l'incognita e scrivendo i vincoli cui deve soddisfare tramite una o più equazioni o disequazioni, può essere utile controllare dimensionalmente le equazioni o le disequazioni ottenute, onde evitare errori banali come la somma di due quantità che rappresentano una un'area e l'altra una lunghezza. A questo proposito, è opportuno insistere sulla competenza "tradurre in equazione" un problema piuttosto che su quella del "risolvere un'equazione". Oggi ci sono infatti strumenti, come software o calcolatrici che risolvono le equazioni, ma non ci sono strumenti che traducano in equazione una situazione problematica.

Si possono fare considerazioni sulla natura dei numeri associati a una misura, da un punto di vista fisico o matematico. Nel primo caso, per motivi dovuti alla sensibilità dello strumento di misura, si raggiungono sempre numeri razionali, per quante cifre si riesca ad ottenere dopo la virgola. Nel secondo caso invece, essendo la misura considerata da un punto di vista teorico e non solo pratico, si introducono i numeri irrazionali come ragione dell'impossibilità di confrontare tutte le misure. Per esempio, se si tratta della diagonale del quadrato misurata dal lato, allora il risultato è un numero non razionale, come quando si misura la lunghezza della circonferenza con il raggio della stessa.

Per quanto riguarda la stima di grandezze, esempi possono essere: le gocce d'acqua contenute in un bicchiere, i granelli di sabbia contenuti in un ditale, le biglie che possono stare in un secchiello. Per i calcoli approssimati: superfici di poligoni dalle misure dei lati, aree di figure dall'approssimazione per difetto e per eccesso di quadrettature, lunghezze di curve dall'approssimazione con poligoni.

In ultimo, vista la pervasività degli strumenti informatici nella scuola, occorre fare opportune riflessioni sulle misure fornite in ambienti informatici come software di geometria dinamica o software algebrici.

## 2.7. FIGURE: PROPRIETÀ E TRASFORMAZIONI

La geometria è stata per molti anni la via maestra per introdurre gli studenti alla dimostrazione. I libri di testo per le scuole superiori nati nell'Ottocento contenevano gli Elementi di Euclide come esempio di sistema ipotetico-deduttivo, considerato base fondamentale, insieme al greco, per la formazione della classe dirigente dell'epoca (Russo, 1998). Con l'inizio del Novecento grandi matematici come Enriques scrissero libri di geometria pensati appositamente per la scuola e basati sugli Elementi. La tradizione scolastica italiana per quanto riguarda l'insegnamento della geometria si è poggiata per un secolo sull'opera euclidea, non solo per il suo valore culturale, ma anche e soprattutto per il suo valore formativo. Negli ultimi anni però si assiste, non solo a livello italiano, ma internazionale (come confermano le ricerche in didattica della matematica), a una crisi nell'insegnamento della geometria, dovuta a diversi fattori, come per esempio: il fatto che la geometria sia una disciplina difficile, non accessibile a tutti, oppure che la scuola superiore oggi sia una scuola di massa e non più una scuola per pochi, come qualche decina di anni fa, e altri ancora.

Se, come scritto all'inizio di questo paragrafo, la geometria è la via regia per insegnare la dimostrazione, nel senso che offre agli studenti un esempio di sistema teorico, in cui sono prefissati i termini non definiti e gli assiomi, quindi sono deducibili da questi le proposizioni come loro conseguenza logica, in realtà costituisce anche un esempio estremamente difficile per gli studenti. Infatti, se, come insegnanti, consideriamo obiettivi fondamentali la capacità di *ripetere* dimostrazioni fatte da altri (libri di testo, docente), otterremo probabilmente che gli studenti raggiungano tali obiettivi, ma rimangano convinti che l'esempio di teoria che hanno di fronte sia regolata da rituali, linguaggi e simboli poco chiari, e che le dimostrazioni seguano schemi autoritari (Harel e Sowder, 1998). Soprattutto, sarà difficile che gli studenti imparino a *costruire* una dimostrazione da soli, in modo autonomo. L'approccio didattico cui sono state sottoposte generazioni di studenti negli ultimi decenni è quello dell'introduzione, all'inizio della scuola superiore, della geometria in forma assiomatica, a partire dai vari assiomi e ricavando con dimostrazioni le varie proprietà.

Per togliere allo studente l'impressione di mistero che circonda il linguaggio e i metodi dimostrativi in geometria (che contribuirà forse a fargli dire da grande "io di matematica non ho mai capito niente"), si potrebbe capovolgere l'approccio didattico, iniziando con attività di costruzione di figure, esplorazione di configurazioni geometriche, formulazione di congetture, argomentazioni, per avere come traguardo a lungo termine la costruzione della competenza del "dimostrare in una teoria".

La geometria, quindi, non perde di attualità e costituisce ancora oggi un ambiente in cui gli studenti possono avere accesso al teorico, iniziando con attività pratiche, manipolative, percettive. Oggi inoltre sono disponibili sul mercato e sul web software di geometria dinamica che favoriscono l'attività esplorativa o costruttiva, motivando gli studenti alla giustificazione di congetture e alla dimostrazione. La ricerca didattica ha mostrato che, con queste attività svolte in micromondi di geometria dinamica come Cabri, esiste una sostanziale continuità tra la fase di congettura e quella di dimostrazione, favorita proprio dal micromondo (Arzarello et al., 1999a).

Gli Standard statunitensi della matematica raccomandano: «Molta della geometria dovrebbe essere imparata attraverso attività, con modelli fisici, disegni, e software dinamico come strumenti di apprendimento» (NCTM, 2000). Le attività esplorative e manipolative si collocano in continuità con la scuola elementare e media, avviate in appropriati campi di esperienza, come per esempio quello delle ombre del sole (Boero et al., 1995), che non hanno solo l'obiettivo di avviare gli studenti alle conoscenze delle proprietà delle figure, ma anche quello di introdurli alla dimostrazione.

Il percorso dovrebbe toccare più volte le dimostrazioni, non viste come ripetizione di un rituale dell'insegnante o del testo, ma come un traguardo di un processo a lungo termine, che favorisce attività iniziali di esplorazione, passa attraverso la formulazione di congetture e alla loro validazione in ambienti tradizionali (come la lavagna o il quaderno) oppure negli ambienti informatici di geometria dinamica (Cabri, Cinderella, calcolatrici grafiche, ...) e giunge alla costruzione (fatta dallo studente) della dimostrazione, con la consapevolezza che dimostrare una proposizione all'interno di un sistema ipotetico-deduttivo significa provare che è conseguenza logica delle premesse fissate.

I micromondi di geometria dinamica come Cabri consentono, grazie proprio alla loro dinamicità, di scoprire proprietà esplorando le figure con la funzione di trascinamento, e di sentire il bisogno di dimostrarle, una volta "viste" sullo schermo. Ci sono esempi di protocolli interessanti offerti da studi di ricerca didattica in cui gli studenti, convinti che una proprietà valga, perché vista in Cabri, si accingono a cercare perché essa vale, all'interno della teoria, quindi a farla scaturire come conseguenza logica di altre proprietà o assiomi studiati (Paola & Robutti, 2001).

Tali micromondi consentono all'insegnante di recuperare inoltre alcuni problemi legati alla tradizione didattica ma anche alla storia della matematica, come per esempio quelli delle costruzioni con riga e compasso, offrendo l'opportunità di riflettere sui motivi teorici per cui una costruzione è corretta, perché Cabri offre un feedback tramite la funzione di trascinamento (Arzarello et al., 1999b).

Il riferimento a una teoria geometrica può essere effettuato sia trattando le principali proprietà della geometria euclidea, sia facendo vedere le potenzialità della geometria delle trasformazioni: in entrambi i casi i software oggi disponibili offrono vantaggi nella visualizzazione, che comunque può essere favorita anche da strumenti e oggetti della vita quotidiana, o dalle opere d'arte (pensiamo per esempio a questioni di simmetria, o di prospettiva).

I contenuti da sviluppare in questo nucleo possono essere: una ampia panoramica sulle tre dimensioni attraverso l'esplorazione di figure uni- bi- e tridimensionali, rafforzando le conoscenze della scuola media, affrontando le loro definizioni e le loro principali proprietà; le costruzioni con riga e compasso o con software, con giustificazione della costruzione; traslazioni e rotazioni, le isometrie tra figure, le omotetie e le similitudini; il problema dell'equivalenza delle figure piane e dei solidi; parallelepipedi e piramidi, solidi di rotazione, poliedri regolari; i vettori: come si disegnano, come si sommano; calcoli di lunghezze, aree, volumi; la rappresentazione cartesiana di curve, figure, solidi, vettori. Questi argomenti, con un livello di approfondimento più o meno esteso, a seconda dell'indirizzo, dovrebbero costituire il bagaglio di conoscenze per gli studenti che affrontano la scuola superiore.

Indicate per un indirizzo in cui la matematica è forte, sono per esempio: la definizione di seno, coseno, tangente, cotan-

gente e il loro utilizzo nella risoluzione di problemi geometrici; le coniche come sezioni nello spazio e come curve nel piano; la risoluzione di triangoli con due teoremi: Carnot e dei seni; le affinità e le loro principali proprietà.

La geometria costituisce una buona via per introdurre gli studenti al processo dimostrativo (intendendo tutto il percorso dall'esplorazione alla dimostrazione come prodotto), ma non deve essere l'unica via di accesso: infatti, è raccomandabile fare attività dimostrativa anche negli altri nuclei.

## 2.8. RELAZIONI, FUNZIONI: SIMBOLI E GRAFICI

Gli studenti, affrontando questo nucleo, dovrebbero acquisire la capacità di riconoscere, costruire, scrivere relazioni tra oggetti reali, numeri, oggetti geometrici, grafici, ... fino a raggiungere le competenze di astrarre, da contesti particolari, regole generali, funzioni, modelli, metodi risolutivi di problemi e saperle esprimere in forma relazionale o funzionale con scrittura simbolica, eventualmente accompagnata da una rappresentazione grafica.

Nel titolo del nucleo la parola algebra non compare appositamente, per non indurre tutti quegli insegnanti affezionati ai programmi tradizionali a dedicare la parte dominante del lavoro in classe a calcoli, espressioni numeriche e algebriche, classificazione di equazioni, sistemi di equazioni e metodi per risolverli, formule trigonometriche o discussioni risolte meccanicamente, magari con artifici da ricordare a memoria<sup>3</sup>. I contenuti dell'algebra invece ci sono, ma devono essere sviluppati con un taglio volto alla ricerca di significati più che alle tecniche. In tal modo, lo strumento tecnologico può aiutare a superare la noiosità dei conti e favorire la consapevolezza, la ricerca del metodo, il controllo del risultato. Per questi e altri motivi il nucleo è particolarmente importante, ed è legato in modo molto stretto a tutti gli altri nuclei. L'algebra infatti può essere vista in molti modi: come ricerca di regolarità, come studio di funzioni e relazioni, come linguaggio trasversale, come studio di strutture basate su una

<sup>3</sup> Dai programmi della scuola media (1979): «Va sconsigliata l'insistenza su aspetti puramente meccanici e mnemonici, e quindi di scarso valore formativo. Si eviterà l'imposizione di regole che potrebbero essere più naturalmente individuate in altri contesti più appropriati».

generalizzazione dell'aritmetica e, ultimo ma non meno importante, come strumento per modellizzare idee matematiche, dati sperimentali o statistici, situazioni problematiche.

Nel nome del nucleo si richiama l'attenzione a simboli e grafici, per sottolineare che le principali competenze da perseguire sono il possesso del senso del simbolo e del senso del grafico.

Un insegnamento sensato dell'algebra dovrebbe mirare quindi a: far acquisire il senso dei simboli; insegnare le manipolazioni in contesti di apprendimento ricchi di significati, non solo legati alla forma; sfruttare la tecnologia, nel senso di offrire l'opportunità di apprendere per tentativi ed errori mediante interazione con manipolatori simbolico-grafici (pensiamo per esempio a Derive, Mathcad o alle calcolatrici simboliche); assecondare i processi genetici di transizione al simbolo a partire dai campi di esperienza degli allievi, dando tempo e spazio a tutte quelle attività che favoriscono tali processi (interazione sociale, mediazione del linguaggio naturale parlato e scritto, esplorazioni, ...); proporre attività di problem-solving stimolanti nell'ambito di vari campi di esperienza interni o esterni alla matematica (combinatoria; modelli fisici, medico-biologici, economici; probabilità e statistica; aritmetica; geometria; ...); avviare alla generalizzazione, alla dimostrazione, al sapere teorico (come negli altri nuclei, questo è un traguardo a lungo termine)<sup>4</sup>.

La ricerca didattica segnala quali sono le difficoltà degli studenti nella comprensione dell'algebra dal punto di vista del senso del simbolo, come per esempio: l'uso dell'uguale, la comprensione del concetto di variabile, il diverso uso che si può fare di una variabile, il dare senso a espressioni simboliche, il caratterizzare l'uso di parametri, ecc. Su questi punti (e non sulla ripetizione meccanica di formule), l'intervento didattico dell'insegnante deve essere particolarmente significativo, ampio ed approfondito, per favorire la comprensione piena del significato da parte di tutti gli studenti. Infatti, «è

<sup>4</sup> È in fase di pubblicazione su supporto cartaceo e multimediale un materiale di aggiornamento sull'algebra, a cura del MIUR e dell'UMI, nell'ambito del protocollo d'intesa. Tale materiale è stato preparato da un gruppo di insegnanti coordinato da Ferdinando Arzarello e Lucia Ciarrapico e sarà reperibile presso il sito dell'UMI: <http://www.dm.unibo.it/~umi/> e presso il sito del liceo Vallisneri di Lucca: <http://www.liceo-vallisneri.lu.it/>. In forma cartacea verrà pubblicato nella collana dei Quaderni.

necessario, per **fare matematica**, saper leggere e scrivere formule e saper operare su di esse; ma lo sforzo intellettuale indispensabile per acquisire un linguaggio simbolico non deve essere fine a se stesso, bensì deve avere un senso ed una motivazione, provenienti sia da un contesto d'uso che da una collocazione culturale, così come da una utilità operativa in situazioni e contesti diversi. Dalla tradizione di una didattica della matematica basata sull'apprendimento di meccanismi possiamo dedurre che la manipolazione di formule come fatto puramente meccanico non produce sempre abilità operativa: ci sono errori nel calcolo algebrico, basati su malintesi e misconcetti, che è davvero difficile correggere, una volta che sono sedimentati» (Robutti & Accomazzo, 2000).

I contenuti affrontabili a livello di scuola superiore possono essere: relazione d'ordine e di equivalenza; progressioni aritmetiche e geometriche; successioni, definite per iterazione e per ricorrenza; funzioni dal particolare al generale e viceversa, dalla funzione ai dati; zeri e segno delle funzioni: interpretazione algebrica e grafica; risoluzione di semplici equazioni (di primo, secondo, ennesimo grado) in modo esatto e/o approssimato; significato del teorema fondamentale dell'algebra; risoluzione di semplici equazioni (polinomiali, razionali, irrazionali, logaritmiche, esponenziali, trigonometriche) in modo esatto e/o approssimato; funzioni: grafico qualitativo (ossia senza utilizzare l'approccio teorico dell'analisi matematica); somma, prodotto, reciproco, quoziente, composizione di funzioni in ambiente numerico e grafico; trasformazioni geometriche applicate ai grafici di funzioni; modelli matematici per risolvere problemi; problemi aperti con congetture e dimostrazioni.

Questi contenuti, così scritti, si prestano a chiavi di lettura diverse, da quella tradizionale come esercitazione e calcolo, con applicazioni di procedure volte a trovare il risultato corretto, a quella nella direzione indicata precedentemente, a proposito di competenze legate al senso del simbolo e del grafico. La nostra proposta si riferisce a quest'ultima chiave di lettura, secondo la quale non è opportuno insistere molto sul prodotto, quanto sul processo intero che occorre per "matematizzare" una situazione problematica.

Nella proposta non è presente l'analisi, nel senso di: utilizzo di limiti e derivate per determinare asintoti, monotonia, massimi, minimi, flessi di una funzione, e nemmeno le strut-

ture particolari quali gruppi, campi, spazi vettoriali, gruppi finiti. Questi argomenti non costituiscono un bagaglio indispensabile né per il futuro cittadino, né per avviare al pensiero teorico e possono essere demandati all'insegnamento universitario. Ciò non toglie che, in particolari indirizzi di scuola superiore a matematica forte, oppure nell'ambito dell'autonomia delle scuole, si possano affrontare, con la dovuta misura e puntando più alla costruzione di significati che all'eccesso di formalismo o di calcolo.

## 2.9. DATI: ANALISI E PREVISIONI

Nella vita di oggi la statistica e la probabilità sono diventate pervasive, a tutti i livelli della società e in tutte le attività umane: dalle previsioni politiche agli studi di medicina, dalle analisi di mercato allo studio degli ecosistemi, dalla finanza alle indagini demografiche. La possibilità di reperire una grande quantità di dati tramite i potenti strumenti tecnologici ci offre, da una parte, grandi potenzialità di indagine, dall'altra, seri e gravi pericoli, come per esempio la manipolazione dell'informazione. Per questo la scuola non può che farsi carico di una corretta formazione dei giovani: per dare loro strumenti qualificanti sia per la vita privata che per la loro vita sociale. I programmi della scuola media raccomandano (1979): «L'insegnante, evitando di presentare una definizione formale di probabilità, avrà cura invece di mettere in guardia gli allievi dai più diffusi fraintendimenti riguardanti sia l'interpretazione dei dati statistici sia l'impiego della probabilità nella previsione degli eventi».

La probabilità e la statistica dovrebbero quindi essere insegnate, nella scuola superiore, con la loro duplice valenza: culturale, come discipline dotate di una loro storia ed epistemologia, strettamente connesse con gli altri rami della matematica, e strumentale, in quanto forniscono importanti strumenti di indagine e di interpretazione della realtà naturale e sociale.

Il nucleo, di giovane tradizione nella scuola superiore e nei precedenti livelli scolari, non deve essere considerato l'ancella degli altri, come succede a volte, quando viene ad esso dedicato minore spazio (o addirittura nessuno spazio) rispetto ad altri temi più tradizionali, come la geometria o l'algebra.

Uno dei motivi per cui i suoi contenuti sono spesso trascurati, è dovuto all'insicurezza che hanno gli insegnanti nell'affrontarli, in quanto si sentono impreparati. Infatti, la tradizione universitaria italiana non ha ancora introdotto queste discipline come obbligatorie nella formazione dei laureati in matematica, a fronte di un insegnamento ormai obbligatorio a tutti i livelli scolari (ad eccezione di alcuni indirizzi tradizionali nei licei). Recentemente, con la riforma dell'Università, tali insegnamenti acquistano un ruolo fondamentale sia nella laurea che nella laurea specialistica.

Il documento UMI indica come competenze fondamentali di questo nucleo: «organizzare una ricerca: formulare domande, raccogliere informazioni quantitative, reperire, organizzare e rappresentare i dati; interpretare i dati usando metodi statistici; sviluppare e valutare inferenze, previsioni ed argomentazioni basate sui dati; effettuare valutazioni di probabilità di eventi mediante conteggio dei casi favorevoli e di quelli possibili o rilevando frequenze relative» (UMI, 2001a). In continuità con esse, per la scuola superiore si può pensare di sviluppare le competenze: scegliere quale media è opportuna per descrivere una collezione di dati; scegliere quale diagramma descrive meglio una collezione di dati; scegliere modelli per descrivere insiemi di dati; costruire modelli per descrivere insiemi di dati; calcolare probabilità usando definizione classica e frequentista; riconoscere eventi dipendenti e indipendenti, compatibili e incompatibili; utilizzare le distribuzioni di probabilità in contesti problematici; effettuare scelte in condizioni di incertezza.

I contenuti legati alle precedenti competenze possono essere: vari tipi di medie; incertezze assolute e relative; indici di variazione e di dispersione; rappresentazioni di dati: grafici, istogrammi, areogrammi, tabelle, tabelle a doppia entrata, ...; formule e funzioni per descrivere modelli di dati (lineare, parabolico, esponenziale, ecc.); esempi di modelli: popolazioni, fenomeni fisici, economici, ...; probabilità di eventi semplici e composti; distribuzioni di probabilità (per esempio, quella binomiale o quella normale). Questi argomenti (a livelli non eccessivi di formalismo) potrebbero costituire il patrimonio di base per gli studenti della scuola superiore, con possibilità di fondare su di essi alcuni concetti profondi, come il significato di inferenza statistica, il significato della legge dei grandi numeri; il significato del teorema limite cen-

trale ed eventualmente, per indirizzi a matematica forte, gli assiomi relativi alla probabilità o la probabilità geometrica.

Nell'ambito dell'analisi dei dati, il volume UMI ci suggerisce che, essendo la realtà variabile e mutevole, ci si spiega «da una parte la necessità di raccogliere informazioni dall'altra la consapevolezza che, nella scelta dell'azione da intraprendere, è possibile commettere errori, per la mancanza di informazioni sufficienti ed anche per la non corretta utilizzazione delle informazioni a disposizione. Qualunque sia il problema conoscitivo che riguarda un fenomeno collettivo e qualunque sia il motivo da cui tale problema ha origine, per giungere alla sua soluzione è necessario definire ciò che si intende studiare, pianificare la raccolta dell'informazione, raccogliere i dati, rappresentarli, analizzarli, ed interpretarli» (UMI, 2001a).

Attività di analisi di dati possono essere svolte a partire da ricerche o misure effettuate dagli studenti, e tramite un'elaborazione con carta e matita o supportata da strumenti software. Per trattare grandi numeri, lo strumento software è particolarmente utile, sia che si tratti di un prodotto multifunzionale, come un foglio elettronico, sia che si tratti di un software dedicato all'elaborazione statistica. In questi casi, si può mettere in luce come il computer: «sia oggi uno strumento indispensabile e integrato alle attività statistiche»; «possa essere impiegato per introdurre in modo intuitivo e/o sgravato da aspetti calcolistici concetti e proprietà che altrimenti, per la loro complessità, non sarebbero affrontabili» (Delucchi, 2000).

Si può cominciare con analisi di dati (con caratteri qualitativi o quantitativi), introducendo i concetti di distribuzione e distribuzione percentuale. I dati possono essere reperiti da giornali, siti Internet o rilevazioni ISTAT, o ancora misure e rilevazioni effettuate in classe o a casa. Appoggiarsi a rappresentazioni grafiche, oltre che a calcoli, può essere particolarmente significativo, onde raccordare aspetti qualitativi di osservazione della rappresentazione grafica con aspetti quantitativi di calcolo di percentuali o numeri indici (media, mediana, ecc.).

È importante introdurre fin dall'inizio della scuola superiore analisi quantitative di tipo variazionale, onde evitare il misconcetto, purtroppo molto diffuso tra gli studenti, che li porta a confondere il valore di una grandezza con quello della sua variazione. Esso non è l'unico: altri misconcetti diffusi, di cui la ricerca didattica porta ampia documentazione, sono per e-

sempio quelle che riguardano le percentuali e i numeri indici, altre sono legate alla composizione di variazioni percentuali, «all'uso dei valori medi che esprimono rapporti tra grandezze (ad es. la velocità media o la densità di popolazione il cui valore su un intervallo di tempo o una regione non è la media dei valori sui sottointervalli o le sottoregioni), alla presenza di fattori di scala (negli ideogrammi occorre usare scale quadratiche o cubiche) e alla lettura degli istogrammi» (Delucchi, 2000). Per esempio, il Nucleo di Ricerca Didattica dell'Università di Genova ha elaborato un progetto didattico (MaCoSa) ricco di attività e supportato da programmi software per l'elaborazione, la rappresentazione e l'analisi dei dati<sup>5</sup>.

Attività che perseguono gli stessi obiettivi possono anche essere svolte con l'utilizzo di calcolatrici grafico-simboliche: nell'ambito del progetto LabClass<sup>6</sup> sono molte le proposte di questo genere, e vanno dalle simulazioni di eventi quali lancio di dadi a studi di regressione, dalla dipendenza statistica con calcolo di chi-quadro a studi di probabilità.

## 2.10. COME SI STUDIA LA MATEMATICA?

La matematica si studia attraverso i problemi, posti da altri o da se stessi, come si diceva all'inizio di questo capitolo. Nei vari nuclei infatti, si possono risolvere situazioni problematiche interne o esterne alla matematica, facendo esplorazioni, attivando strategie di risoluzione, ma certamente non applicando ricette precostituite.

«La capacità di risolvere problemi di tipo matematico non è innata, anche se naturalmente possono presentarsi maggiori o minori predisposizioni o interessi nell'affrontare tali problemi. Questa capacità può essere educata e potenziata, non soltanto aumentando il proprio bagaglio di conoscenze attraverso lo studio, ma anche e soprattutto risolvendo direttamente problemi, provando il gusto di tentare, sbagliare e ritentare.

Per risolvere problemi si adottano alcune strategie, che non sono semplicemente riconducibili alle particolari tattiche

<sup>5</sup> Il progetto è disponibile in rete all'indirizzo: <http://macosa.dima.unige.it/ba-se/pag.htm>

<sup>6</sup> Il progetto è stato pubblicato nel 2001 dal Ministero della Pubblica Istruzione, nei Quaderni della Direzione Classica, n. 44, dal titolo: *Il Progetto Labclass*, e distribuito alle scuole superiori.

e tecniche sufficienti a risolvere esercizi standardizzati. Il calcolo di una espressione o della derivata di una funzione può essere esercizio complesso, ma richiede capacità prevalentemente di tipo esecutivo che non esauriscono l'insieme delle abilità che si vorrebbe uno studente acquisisca» (Marschini et al., 1990).

Si può pensare a *problemi di costruzione geometrica*, classici storici del percorso della matematica nella cultura, oggi rivalutabili con la presenza dei software di geometria dinamica che consentono di ricevere anche un feedback sulla correttezza della costruzione, tramite la funzione di trascinarsi.

Si possono proporre *problemi con condizioni*, a soluzione unica oppure con infinite condizioni, che dipendono da un parametro. Anche questi problemi sono particolarmente ricchi per le esplorazioni che consentono tramite software sia di geometria sia di manipolazione algebrica, se si utilizzano le formulazioni algebriche e le loro rappresentazioni.

I *problemi di descrizione* possono essere particolarmente interessanti, sia nei nuclei di dati che nei nuclei di numeri e di figure, in quanto si utilizzano strumenti descrittivi quali grafi, tabelle, matrici o vettori per organizzare l'informazione. All'interno dei problemi di descrizione, occupano un posto particolarmente importante i problemi in cui si perviene a una descrizione simbolica della situazione, tramite una funzione, che può essere successivamente studiata in rapporto alla situazione di partenza.

I *problemi di misura* costituiscono parte fondamentale del curriculum, in quanto coinvolgono aspetti tanto matematici (figure, numeri, relazioni, probabilità) che di vita reale (misure di grandezze fisiche per esempio).

In relazione a questi, i *problemi di variazione*, di cui i problemi di massimo e minimo costituiscono casi particolari, consentono di attivare strategie di scelta sia in condizioni di certezza che di incertezza.

I *problemi di dimostrazione*, che possono essere formulati in modo chiuso ("Dimostra che...") o aperto ("Esplora e vedi cosa succede se ..., formula congetture e dimostrale") costituiscono un nodo cruciale dell'attività matematica, non solo in relazione alla geometria, ma anche agli altri nuclei<sup>7</sup>.

<sup>7</sup> Un percorso dedicato ai problemi di dimostrazione si trova in (Paola & Robutti, 2001).

I *problemi di modellizzazione* si riferiscono alla costruzione di modelli a partire da esplorazioni in ambito numerico (es. numeri naturali, o numeri reali), dalla ricerca di regolarità in insiemi di dati di misura, da situazioni geometriche, ecc. Tali modelli vanno espressi in forma simbolica tramite funzioni che legano variabili, e rappresentati in ambienti tradizionali (carta e matita) o con l'aiuto delle tecnologie (software, micromondi, calcolatrici)<sup>8</sup>.

Infine ci sono i *problemi d'esame*, quelli che attendono gli studenti di alcuni indirizzi di scuole all'Esame di Stato, riguardano tutto il programma svolto nel quinquennio superiore, sono di una certa complessità. Questi problemi andrebbero svolti negli ultimi tre anni, non solo negli ultimi tre mesi del quinto anno, in quanto risolvere tali problemi coinvolge competenze a lungo termine, che non possono essere acquisite in poco tempo<sup>9</sup>.

## 2.11. PERCHÉ SI STUDIA LA MATEMATICA?

La matematica si studia per la sua valenza strumentale e per la sua valenza culturale. A proposito della seconda, è necessario far capire allo studente che la matematica consente di giustificare le congetture formulate, tramite le dimostrazioni, con cui si spiega perché la congettura vale, in quanto conseguenza logica di premesse non giustificate (gli assiomi della teoria), o di proprietà. Ciò può essere compreso solo attraverso un lungo percorso, che parta da manipolazioni che sfruttano la percezione (come si è detto nel capitolo 1), attraverso l'esperienza diretta con le cose, o le loro simulazioni.

Devono essere realizzate attività e metodologie, in modo tale da condurre l'alunno con continuità dall'intuizione al rigore, dagli aspetti percettivi a quelli teorici, espressi in forma linguistica e simbolica precisa e, soprattutto, corretta dal punto di vista logico. Nell'arco della scuola superiore si fa

<sup>8</sup> A tale proposito segnaliamo, nell'ambito del Progetto SeT (Scienza e Tecnologia) nazionale: *Uso delle tecnologie dell'informazione e della comunicazione in attività di modellizzazione matematica*, l'Unità di lavoro 6, in cui si presentano diverse proposte di modellizzazione per la scuola superiore con l'uso delle calcolatrici e dei software di manipolazione simbolica. Tale Progetto è in rete sul sito dell'INDIRE (ex BDP), che ha curato il coordinamento nazionale dei vari progetti. È visibile sul sito: <http://www5.indire.it:8080/set/comunicazione/comunicazione.htm>

<sup>9</sup> Una possibile metodologia didattica per affrontare questi problemi è suggerita nei volumi: (Nolli & al., 2001a, 2001b).

comprendere agli studenti la struttura ipotetico-deduttiva delle teorie matematiche, mettendone in luce alcuni scorci, anche attraverso riferimenti storici.

Nella scuola elementare e media ci può essere un avviamento al pensiero teorico, introducendo gli studenti gradualmente alla formulazione di enunciati condizionali, in cui si riconoscano chiaramente ipotesi e tesi, alla risoluzione di problemi, alla formalizzazione di procedimenti risolutivi: «le nozioni matematiche di base vanno fondate e costruite partendo da situazioni problematiche concrete, che scaturiscano da esperienze reali del fanciullo» (Programmi didattici per la scuola primaria, 1985). Per avviare al pensiero teorico è fondamentale diversificare l'approccio ai problemi e alle strategie di risoluzione, perché gli studenti sviluppino comprensione del pensiero matematico quando inventano ed esaminano metodi per risolvere problemi matematici.

Nella scuola secondaria l'obiettivo prioritario è avviare alla dimostrazione, facendo vedere che non si dimostra solo in geometria (come è tradizione attualmente nella scuola), ma si possono fare dimostrazioni anche in altri ambiti: aritmetici, algebrici, analitici, ecc. Ciò che conta è che gli allievi maturino, nel corso degli studi, il fatto che dimostrare una proposizione sia necessario non per ripetere un rituale, né per seguire schemi autoritari (Harel e Sowder, 1998), né solo per essere convinti della verità della proposizione, bensì per mostrare come essa discenda deduttivamente da premesse, ossia la proposizione sia conseguenza logica di altre, all'interno di una teoria. Per fare ciò la ricerca didattica ha mostrato che non è adeguato imporre compiti del tipo "dimostra che..." agli studenti, ma proporre enunciati aperti, in cui essi si sentano liberi di esplorare, congetturando e testando le loro congetture, per passare poi alla dimostrazione delle stesse. Alcuni software possono essere utili ad appoggiare i ragazzi in tale compito, arricchendo la possibilità di fare esperienze proprio nella fase esplorativa, per esempio:

- nell'ambito dei numeri, i fogli elettronici o le calcolatrici;
- nell'ambito delle formule, i software di calcolo algebrico o le calcolatrici grafico-simboliche;
- nell'ambito della geometria analitica o dell'analisi, i software che disegnano funzioni;
- nell'ambito della geometria, i software di geometria dinamica.

All'interno di tutti i nuclei si possono abituare gli studenti non tanto ad affrontare problemi di routine o a memorizzare dimostrazioni fatte da altri, quanto ad affrontare situazioni problematiche di cui non si conosce il metodo o lo strumento risolutivo a priori «poiché né nel mondo reale né in quello astratto della matematica si fanno problemi chiaramente etichettati» (NCTM, 2000).

Quindi, nel nucleo dei numeri si possono fare dimostrazioni in merito alle scomposizioni in fattori o dimostrazioni per induzione. Nel nucleo delle grandezze, si può dimostrare che la diagonale e il lato del quadrato sono incommensurabili, introducendo quindi un discorso sui numeri irrazionali, oppure fare dimostrazioni nell'ambito delle equivalenze di aree (teoremi di Euclide). Nel nucleo delle figure si possono fare dimostrazioni sulle proprietà delle figure piane, solide in ambito euclideo, oppure dimostrazioni nel discorso delle trasformazioni geometriche. Nel nucleo delle relazioni si possono fare dimostrazioni che coinvolgono il simbolismo dell'algebra fine a se stesso (manipolazioni) oppure legato alla geometria analitica. Nel nucleo dei dati si possono fare dimostrazioni in ambito probabilistico.

## 2.12. CON QUALI STRUMENTI SI STUDIA LA MATEMATICA?

L'integrazione delle nuove tecnologie nell'insegnamento della matematica è un fenomeno nato negli ultimi due decenni, che si sta espandendo sempre di più, a tutti i livelli scolari. La filosofia che sottende questa integrazione non è tanto l'uso della tecnologia di per sé, quanto l'introduzione della tecnologia nel progetto didattico-curricolare della matematica, per le sue valenze di supporto, aiuto, approfondimento, velocità, esplorazione, possibilità grafiche, di calcolo numerico e recentemente anche di calcolo simbolico.

La pratica didattica da una parte, e la ricerca didattica dall'altra, si occupano di questo problema, studiando sia come utilizzare la tecnologia in classe, sia quale mediazione essa possa offrire nei processi di apprendimento. L'obiettivo comune è che lo studente utilizzi gli strumenti tecnologici in modo sensato, sia per costruire significati degli oggetti matematici di studio, sia come applicazioni in contesti interni o esterni alla matematica. In tal modo, potrà essere conscio

delle potenzialità e dei limiti di tali strumenti, controllarne i risultati, utilizzarli per congetturare o per testare congetture fatte. La tecnologia, quindi, contribuisce a formare il cittadino in un percorso matematico con la duplice valenza della disciplina: quella culturale e quella strumentale.

La ricerca didattica mette in luce diversi ambiti di indagine, alcuni dei quali saranno presenti negli esempi di attività del prossimo capitolo. Qui ci limitiamo a dare un quadro generale dei principali filoni di ricerca (Robutti, 2002).

Un primo ambito da esplorare è quello della tecnologia in sé, per rendersi conto se, e come, possa essere utilizzata per fare attività matematica in classe: si tratta cioè di valutarne le potenzialità e i limiti relativamente alla teoria matematica a cui fa riferimento.

Un altro ambito consiste nell'analizzare in quale modo la tecnologia è utilizzata dagli studenti in contesti di problem solving, per evidenziare quali siano le potenzialità e i limiti in un contesto di apprendimento, dal punto di vista cognitivo. Si tratta di un punto, questo, particolarmente delicato, perché analizza da una parte, il tipo di mediazione fornita, dall'altra, quali implicazioni essa abbia sull'apprendimento. Significa riflettere sulla domanda: «Che cosa significa che il software lavora per lo studente?» (Hershkovitz & Kieran, 2001).

Un terzo ambito è quello dell'analisi delle differenze che possono emergere, a parità di contesto di apprendimento, tra l'uso della tecnologia e quello di strumenti tradizionali come carta e matita. Anche se è molto difficile generalizzare i risultati, in ogni caso le due situazioni a confronto possono presentare diversità.

Un altro ambito potrebbe essere quello dell'uso di tecnologie diverse nello stesso contesto di apprendimento.

Il precedente elenco non può esaurire tutte le problematiche connesse all'introduzione della tecnologia nell'insegnamento della matematica, ma mette in evidenza quelle più significative.

Parallelamente alle problematiche sollevate dalla ricerca didattica, la pratica didattica si è indirizzata, negli ultimi anni, sia in Italia che all'estero, all'utilizzo di micromondi che offrono una mediazione particolarmente utile all'apprendimento di concetti matematici, proprio in quanto lo studente può interagire con essi e sfruttare il loro feedback per costruire significati, fare esplorazioni e formulare congetture.

Per esempio Cabri o ambienti simili, come Sketchpad oppure Cinderella, con le funzioni di costruzione, trascinamento e misura sono particolarmente utili nella formulazione di congetture in geometria. Oppure L'Algebrista (Cerulli & Mariotti, 2001), micromondo che consente allo studente la manipolazione algebrica di espressioni, alla luce dei teoremi che sottendono le trasformazioni di formule in formule ad esse equivalenti.

Altri software sono particolarmente favorevoli alla manipolazione simbolica, in quanto offrono più ambienti paralleli ed interattivi, in genere quello numerico, quello simbolico e quello grafico: sono i CAS (Computer Algebra System). Nella scuola sono diffusi Derive e l'ambiente analogo delle calcolatrici grafico-simboliche, all'Università sono presenti per esempio Mathematica o Maple.

Negli anni 80 la scuola superiore fu attraversata dall'aggiornamento dei programmi di matematica e di fisica con il Piano Nazionale dell'Informatica, attraverso il quale venne introdotto il linguaggio di programmazione Pascal, per le sue valenze didattiche in quanto linguaggio strutturato (a differenza del Basic di allora, non strutturato). Le valenze didattiche di una programmazione strutturata prescindono dalla presenza del Pascal, che oggi è difficile reperire e utilizzare sui computer<sup>10</sup>.

L'abitudine a scrivere algoritmi in un pseudo-codice prescinde dalla presenza del linguaggio di programmazione stesso, e possiede un'alta valenza didattica in quanto abitua a ragionare, applicare regole, suddividere un problema complesso in sotto-problemi, ecc. Quindi, nella scuola è importante abituare gli studenti ad attività di questo tipo, che possono poi essere concretizzate in un codice (non uno in assoluto, ma quello del momento, che oggi potrebbe essere Java oppure il linguaggio contenuto nelle calcolatrici simboliche). Tali attività non vanno mai intese di per se stesse, ma con finalità di risoluzione di problemi in contesti matematici o extra-matematici.

La scuola infatti non può inseguire la tecnologia, ma abituare gli studenti ad un rigore scientifico di ragionamento e di linguaggio, che consente loro di operare con flessibilità su una tecnologia piuttosto che su un'altra.

<sup>10</sup> Esistono in rete versioni free di Pascal.

Di qualunque tecnologia si tratti, è meglio che sia inserita all'interno di un progetto didattico, in uno specifico contesto di insegnamento-apprendimento, in cui sono progettate le attività dei ragazzi e il contributo dell'insegnante, perché la tecnologia da sola non produce necessariamente innovazioni significative nella didattica (Bottino & Chiappini, 1995).

Due sono gli aspetti fondamentali del rapporto tra matematica e tecnologia: da una parte, il fatto che la matematica è supportata dalla tecnologia nell'indagine, nei calcoli, nella modellizzazione, nell'elaborazione e analisi di dati, nella comunicazione, nella visualizzazione; dall'altra, il fatto che la presenza della tecnologia aumenta l'enfasi che la scuola può dare ai contenuti matematici, perché permette di concentrarsi più sugli aspetti progettuali, critici, di controllo dei processi. Non solo, ma gli aspetti percettivi, visivi, dinamici, che sono messi in gioco con la tecnologia oggi a disposizione permettono agli allievi di costruire in modo progressivo e graduale il significato degli oggetti che incontrano all'interno della matematica.

### 2.13. È IMPORTANTE STUDIARE MATEMATICA

La matematica è fondamentale sotto diversi punti di vista: dal punto di vista della ricerca, perché evolve in direzioni spesso inaspettate e a volte apparentemente fini a se stesse, fino a scoprire, qualche tempo dopo, che tali direzioni sono utili alla risoluzione di qualche problema posto da altre discipline. La storia della matematica offre molti esempi di questo genere, tanto per citarne uno pensiamo alla nascita del calcolo differenziale assoluto, poi detto calcolo tensoriale, che è stato determinante ad Einstein per la formulazione della teoria della relatività. È importante quindi formare dei ricercatori in matematica, affinché contribuiscano all'evoluzione della disciplina.

La matematica è fondamentale per tutte le sue applicazioni, dalla ricerca in campo medico alle discipline giuridico-economiche, a quelle scientifico-sperimentali, a quelle biologico-naturalistiche. In particolare la matematica è utile in tutti i suoi intrecci con l'informatica e con la tecnologia in generale, da quella utilizzata nella ricerca a quella utilizzata nell'industria produttiva, dalla fase di progettazione a quella di realizzazione e manutenzione di prodotti o macchinari.

Ma ciò che caratterizza la matematica rispetto alle altre discipline scientifiche, è il fatto che «la matematica è una scienza che può studiare se stessa. In termini tecnici, la matematica è una scienza autoreferenziale. ... La fisica, la chimica, la medicina debbono passare per il vaglio della realtà. Non così la matematica: come in un racconto di Borges, la matematica, studio delle relazioni tra oggetti, trasforma le relazioni stesse in oggetti matematici, che sono pertanto messi in relazione tra loro, creando relazioni tra relazioni, quindi nuovi oggetti, e così via all'infinito» (Bombieri, 2001).

La matematica è importante per tutti i cittadini, e il suo insegnamento va potenziato a tutti i livelli scolari. «La nostra società deve affrontare problemi educativi gravi ed inediti. Fino ad un recente passato, lo studio era la via più concreta di progresso sociale per i giovani provenienti dai ceti più umili. In particolare, la matematica consentiva spesso un'ottima affermazione, anche a giovani dotati di modeste capacità espressive. Adesso accade in molti casi che i giovani sono in condizioni ambientali e materiali ottime per lo studio, ma lo studio non li attira. L'attività intellettuale, che alle precedenti generazioni, immerse nella fatica del lavoro manuale, appariva come un miraggio, sembra trasformarsi per molti giovani di oggi in un peso insopportabile. La scuola spesso si riduce a luogo di mera socializzazione. D'altra parte, sembra impossibile, in presenza di un diffuso benessere materiale, imporre ai giovani artificialmente delle difficoltà a scopo educativo. Questo è veramente ciò che si cerca di ottenere con lo sport, ma con limiti evidenti. Io penso che la matematica, per la vastità del suo orizzonte, per le soddisfazioni con cui ripaga l'impegno intellettuale, possa essere il battistrada anche per l'educazione intellettuale di oggi. Ma per vincere questa scommessa occorre che cambi radicalmente il modo di insegnare matematica, in modo che questa disciplina acquisti senso, gusto, stimolo all'inventiva e alla scoperta, gratificazione per piccole o grandi conquiste ...» (Prodi, 2000).

## CAPITOLO TERZO

### ESEMPI DI ATTIVITÀ

*Non insegnate agli studenti ciò che essi potrebbero scoprire da soli.*

H. Freudenthal

In questo capitolo si presentano alcuni esempi di attività per la scuola secondaria superiore, nell'ambito di un progetto curricolare basato sui nuclei fondanti, con qualche riflessione sulla metodologia didattica.

#### 3.1. ATTIVITÀ NEL NUCLEO *NUMERI: OPERAZIONI*

Nell'ambito dei numeri sono molte le attività didattiche da realizzare in classe, nell'ottica di concorrere alla conquista (da parte dell'allievo) del senso del numero di cui si parlava nel capitolo precedente. Queste attività si possono realizzare con o senza l'uso della tecnologia, e dovrebbero tendere non tanto (o non solo) alla conquista della capacità di operare con i numeri, cioè di calcolare, ma anche e soprattutto di fare esplorazioni in ambito numerico, formulare congetture e dimostrare.

Dai numeri, fonte inesauribile di scoperte e riflessioni, si può trarre spunto per aiutare gli studenti di un biennio ad arricchire le proprie esperienze matematiche e ad avviarsi in modo consapevole al calcolo algebrico. Per questo, molte attività in ambito numerico possono fungere da trampolino per la conquista della capacità di generalizzare regolarità tra numeri introducendo simboli. Utilizziamo la parola numeri in questo contesto con un significato ampio, che spazia dal valore iconico del simbolo numero ai numeri figurati, alle situazioni geometrico-spaziali in cui la regolarità osservata si può esprimere con una relazione numerica.